Zwischen der x-Achse und der Parabel zu $f(x)=x^2$
soll im Intervall [0;b] der Inhalt der Fläche bestimmt werden.
Dies geschieht näherungsweise mittels Unter- und Obersumme
von Zerlegungsrechtecken.
Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl Zerlegungen
dann haben alle n Rechtecke der Obersumme OS_n
die Grundseite $g=\frac{b}{n}$ und die Höhen $h_i=f(x_i)=\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)^2$.

$$\begin{aligned}
OS_n &= A_{R1}+A_{R2}+A_{R3}+\ldots+A_{Rn-1}+A_{Rn}\\
&= g\cdot h_1+g\cdot h_2+g\cdot h_3+\ldots+g\cdot h_{n-1}+g\cdot h_n\\
&= \frac{b}{n}\cdot\left(1\cdot\frac{b}{n}\right)^2+\frac{b}{n}\cdot\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)^2+\frac{b}{n}\cdot\left(3\cdot\frac{b}{n}\right)^2+\ldots+\frac{b}{n}\cdot\left((n-1)\cdot\frac{b}{n}\right)^2+\frac{b}{n}\cdot\left(n\cdot\frac{b}{n}\right)^2\\
&= \frac{b}{n}\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^2\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2\right)\\
&= \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}=\frac{b^3}{6}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{n\cdot n\cdot n}\\
&= \frac{b^3}{6}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}=\frac{b^3}{6}\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} OS_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^3}{6}\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{b^3}{6}\cdot 1\cdot 1\cdot 2=\frac{b^3}{3}$$

Für die Untersumme US_n gilt dann (das letzte Rechteck der Obersumme fehlt!)

$$US_n=OS_n-A_{Rn}=\frac{b^3}{6}\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{b^3}{n^3}\cdot n^2=\frac{b^3}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{b^3}{n}$$

und $\lim_{n\to\infty} US_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^3}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{b^3}{n}\right)=\frac{b^3}{6}\cdot 1\cdot 2-0=\frac{b^3}{3}$