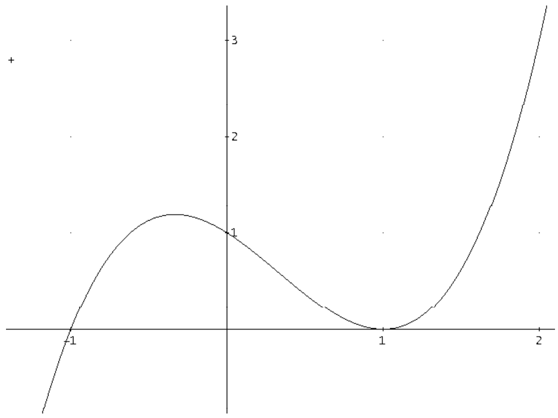
Lösungen

1. Aufgabe

a) Nullstellen: notw. und hinr. Bed. ist $f(x) = 0$. Aus $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ folgt durch systematisches Probieren $x_{N1} = 1$. Durch eine Polynomdivision oder durch geeignetes Faktorisieren erhält man den quadratischen Term $x^2 - 1 = 0$, aus dem sich die weiteren Nullstellen $x_{N2} = -1$ und $x_{N3} = 1$ ergeben. $x_{N1} = 1$ ist also eine doppelte Nullstelle. Die möglichen Extremstellen ergeben sich aus $f'(x) = 0$, woraus sich $3x^2 - 2x - 1 = 0$ ergibt. Es ist

$$
\begin{aligned}
&(x^3 - x^2 - x + 1) : (x - 1) = x^2 - 1 \\
&-(x^3 - x^2) \\
&-------- \\
&-x + 1 \\
&-(-x + 1) \\
&------- \\
&0
\end{aligned}
$$

$3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (x - \frac{1}{3})^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow |x - \frac{1}{3}| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}$. Die möglichen Extremstellen sind $x_{E1} = 1$, $x_{E2} = -\frac{1}{3}$. Es ist $f''(x) = 6x - 2$, ferner $f''(1) = 4 > 0$ und $f''(-\frac{1}{3}) = -4 < 0$. Daher liegt bei T(1;0) ein Tiefpunkt vor und bei $H(-\frac{1}{3};\frac{32}{27})$ ein Hochpunkt vor. Die mögliche Wendestelle ergibt sich aus $f''(x) = 0$, also $x_W = \frac{1}{3}$. Da zusätzlich $f'''(\frac{1}{3}) = 6 \neq 0$ ist, ist $W(\frac{1}{3};\frac{16}{27})$ der Wendepunkt des Graphen von f.



b) Die Steigung der Wendetangente erhält man durch $m_t = f'(\frac{1}{3}) = -\frac{4}{3}$. Aus dem Ansatz $n: y = m_n x + b_n$ und mit der Formel $m_n m_t = -1$ erhält man zunächst $n: y = \frac{3}{4}x + b_n$, woraus sich nach Einsetzen der Koordinaten von W $b_n = \frac{37}{108}$ und $n: y = \frac{3}{4}x + \frac{37}{108}$ ergibt.

c) Der Faktor a bewirkt keine Änderung der x-Koordinate des Wendepunktes, da w'' und f'' die gleichen Nullstellen haben (ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten zwar erhalten, kann aber dann weg dividiert werden). Die Ordinate des Wendepunktes W wird mit dem Faktor a multipliziert. Der Wendepunkt wandert also wegen $y_w > 0$ mit wachsendem $a > 1$ nach oben. Auch die Ableitungen werden mit dem Faktor a multipliziert, sodass die Tangentensteigungen in W dem Betrage nach um den Faktor a größer werden. Die Tangenten werden mit wachsendem $a > 1$ immer steiler, sind aber fallend.

2. Aufgabe

Vorbemerkung: In Kontextaufgaben ("Anwendungsaufgaben") wie der Aufgabe 2 müssen im Allgemeinen komplexe Sachverhalte vereinfacht dargestellt werden, damit sie von den Schülern bearbeitet werden können. Zum Kontext der "Anaeroben Schwelle" findet sich eine ausführliche Darstellung beispielsweise in:
Heck, Hermann: Energiestoffwechsel und medizinische Leistungsdiagnostik / Hrsg.: Trainerakademie Köln e.V./ ISBN 3-7780-8081-4

a) Wegen $f(16) = 6,872$ beträgt die Laktatkonzentration bei einer Geschwindigkeit von $16\frac{km}{h}$ 6,872 mmol pro Liter Blut.

b) Man entnimmt der Zeichnung den Schnittpunkt zwischen der Parallelen zur x-Achse durch den Punkt $P(0/4)$ und dem Graphen von f. Daraus ergibt sich, dass die anaerobe Schwelle etwa bei einer Geschwindigkeit von $14,5\frac{km}{h}$ erreicht wird.

c) Es gilt: $f'(x) = 0,09x^2 - 1,836x + 9$. Ansatz:
$f'(x) = 0,09x^2 - 1,836x + 9 = 1 \Leftrightarrow x^2 - \frac{102}{5}x + \frac{800}{9} = 0$. Es folgt: $x \approx 14,1 \vee x \approx 6,3$
Nach der Definition von Simon ergibt sich als Wert für die anaerobe Schwelle eine Geschwindigkeit von etwa $14,1\frac{km}{h}$. $6,3\frac{km}{h}$ entfällt als Lösung, da es außerhalb des angegebenen Bereichs liegt.
Anmerkung: $6,3\frac{km}{h}$ wäre im Übrigen auch keine sinnvolle Lösung. Bei diesem Wert handelt es sich um die Geschwindigkeit eines zügig gehenden Fußgängers. Ein Sportler wird dabei nicht bereits die anaerobe Schwelle erreichen.

d) Zu bestimmen sind die Abszissen von Hoch- und Tiefpunkt des Graphen.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,09x^2 - 1,836x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 20,4x + 100 = 0$. Es folgt: $x \approx 8,19 \vee x \approx 12,21$
Aus $f''(x) = 0,18x - 1,836$ ergibt sich: $f''(8,19) < 0$ und $f''(12,21) > 0$. Die Laktatkonzentration nimmt also im Bereich von ca. $8,19\frac{km}{h}$ bis $12,21\frac{km}{h}$ ab. Eleganter ist der Ansatz: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0,09x^2 - 1,836x + 9 < 0 \Leftrightarrow \ldots$ Dies führt zu: $8,19 < x < 12,21$.

e) Gesucht ist die Wendestelle der Funktion f. Falls den Schülerinnen und Schülern das Symmetrieverhalten einer kubischen Funktion bekannt ist, kann der gesuchte Wert von $10,2\frac{km}{h}$ direkt aus den Werten aus Teil d) errechnet werden. Sonst gilt:
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 0,18x - 1,836 = 0 \Leftrightarrow x = 10,2$ und $f'''(x) = 0,18 \neq 0$ für alle x.

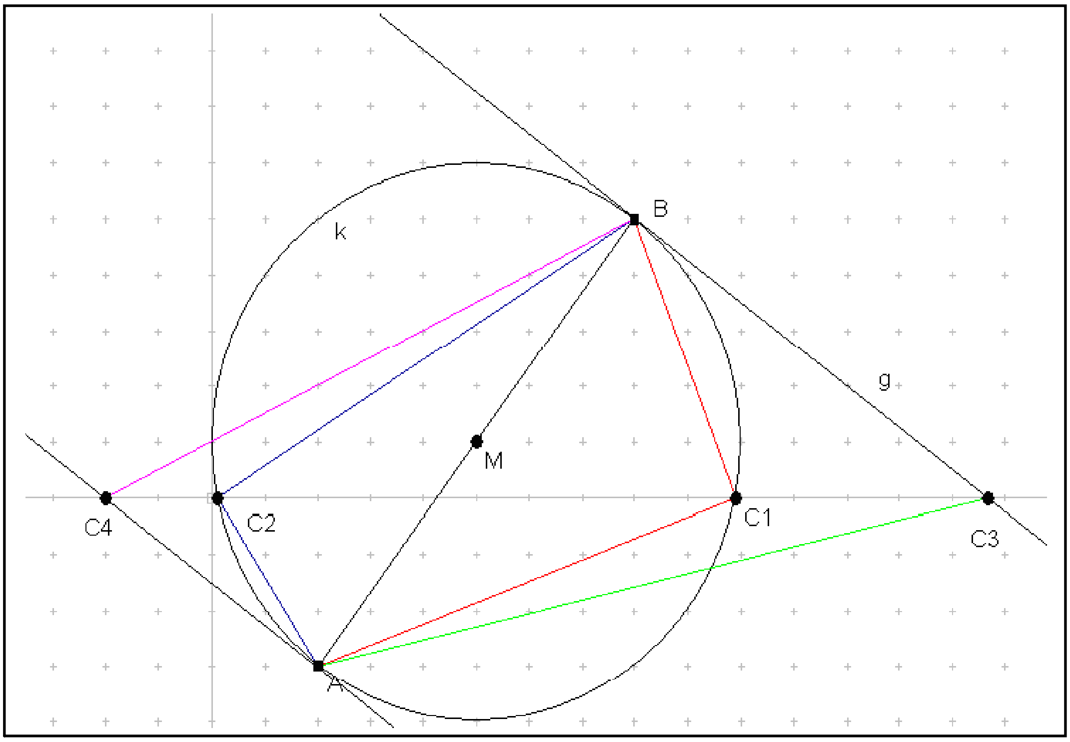
f) Auf Grund der Informationen im Text gibt es zwei Möglichkeiten, den Trainingszustand zu vergleichen: Nach dem Verfahren aus b) lässt sich deutlich sehen, dass der Sportler B besser trainiert ist. Die Zeichnung liefert einen Wert von etwa $16,5\frac{km}{h}$ für die anaerobe Schwelle.
Wegen des fehlenden Funktionsterm lässt sich die anaerobe Schwelle nach der Definition von Simon nicht berechnen. Aber eine zeichnerische Lösung durch Eintragen einer Tangente etwa über Parallelverschiebung ergibt auch hier einen deutlich höheren Wert als bei Sportler A (Es reicht eine Lösung!).

3. Aufgabe

Version A						Version B					
a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	e	f
X		X	X		X		X	X			
	X	X		X		X	X		X		X
X	X		X		X	X		X			
X		X				X		X	X	X	X

4. Aufgabe

a)

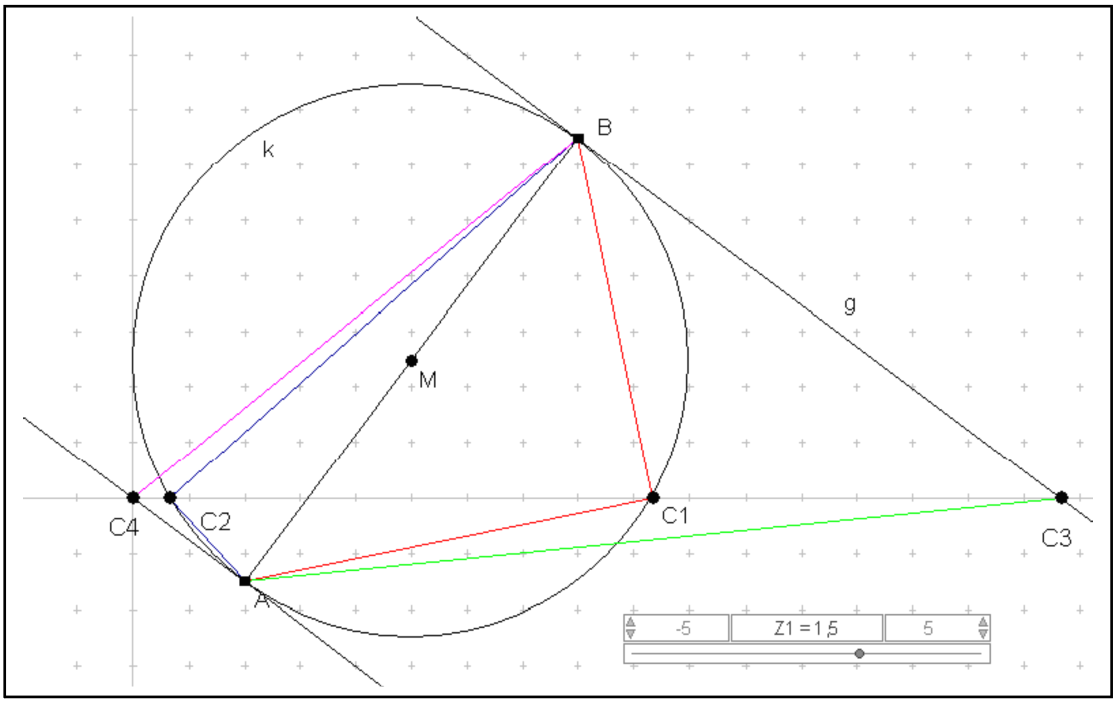


b) Kreismittelpunkt ist der Mittelpunkt $M(5|1)$ der Strecke $\overline{AB}$ mit $A(2|-3)$ und $B(8|5)$. Kreisradius ist der halbe Abstand $\frac{1}{2}\sqrt{(8-2)^2+(5-(-3))^2}=5$ zwischen A und B. Daraus folgt: $k:(x-5)^2+(y-1)^2=5^2$. Die Tangente g geht durch den Punkt B. Dies führt zum Ansatz: $g: y=m\cdot(x-8)+5$. Da die Tangente orthogonal zur Gerade durch A, B steht, ist die Tangentensteigung m der negative Kehrwert von $\frac{5-(-3)}{8-2}=\frac{4}{3}$. Mit $m=-\frac{3}{4}$ ergibt sich: $g: y=-0,75\cdot(x-8)+5=11-0,75x$.

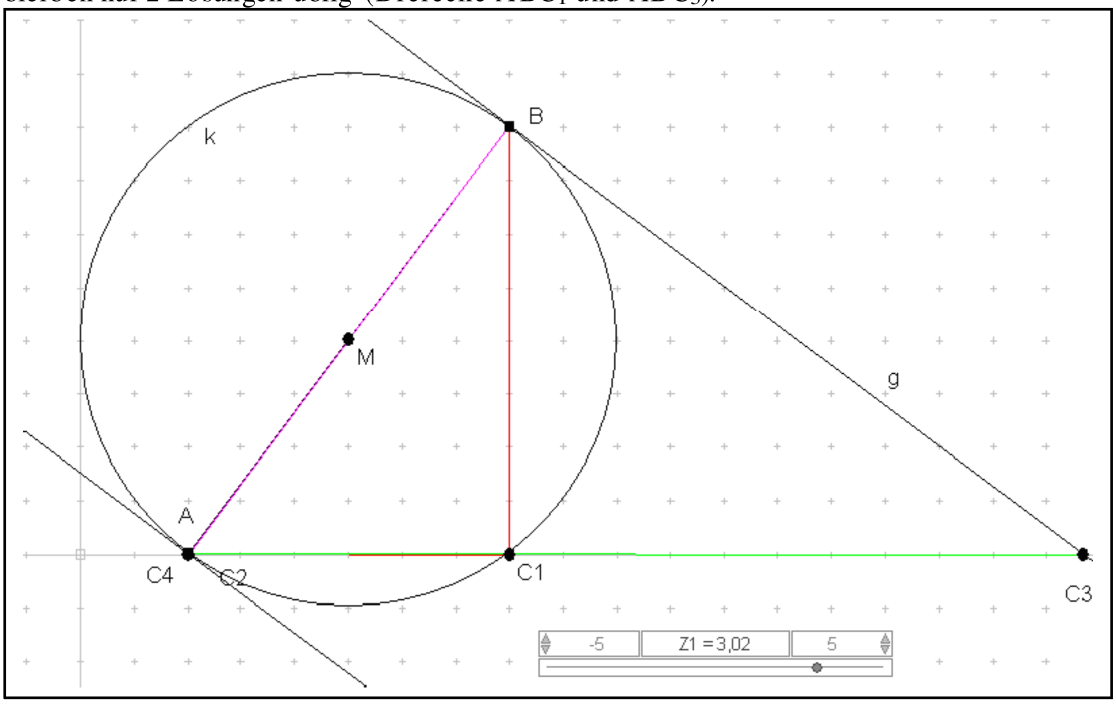
c) Es ist in beiden Fällen $y = 0$ zu setzen und nach x aufzulösen. $(x-5)^2 + (-1)^2 = 5^2$ $\Leftrightarrow (x-5)^2 = 24 \Leftrightarrow x = 5 + \sqrt{24} \vee x = 5 - \sqrt{24}$, also $x \approx 0{,}10 \vee x \approx 9{,}90$ (vgl. C1 und C2 in Teil a)), ferner: $0 = 11 - 0{,}75x \Leftrightarrow x = \frac{11}{0{,}75} = 14\frac{2}{3}$, also $x \approx 14{,}67$ (vgl. C3 in Teil a)).

Nachstehend wird die Maximallösung für die bewusst offene Aufgabenstellung angegeben. Die Abbildungsserie zeigt die Veränderungen für eine Verschiebung um t nach oben.

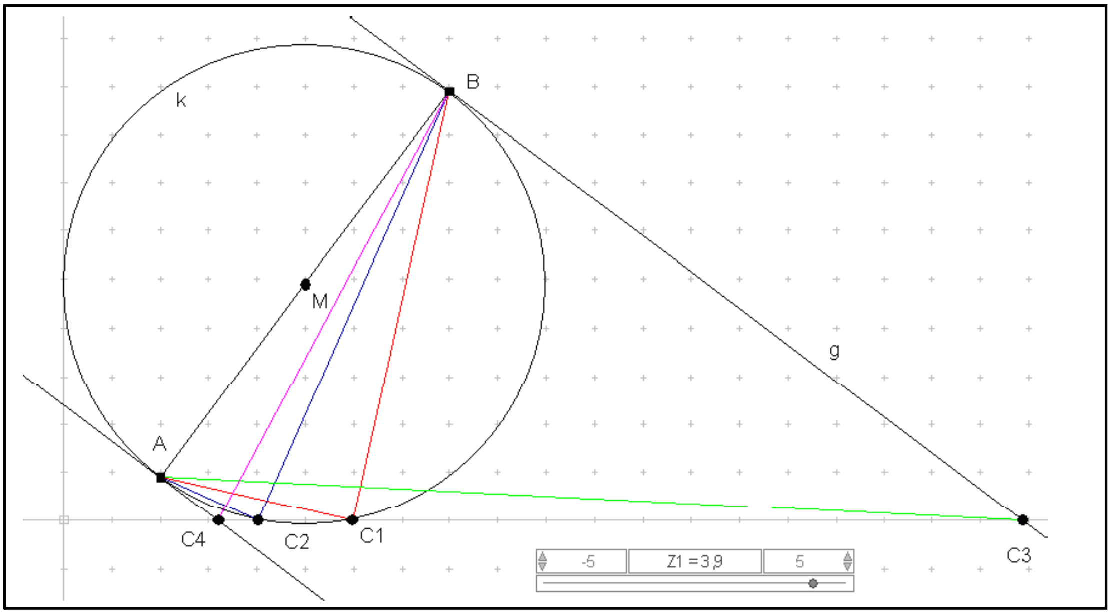
d0) Solange $0 \le t < 3$ ändert sich die in a) gezeichnete Situation mit 4 Lösungen qualitativ nicht.



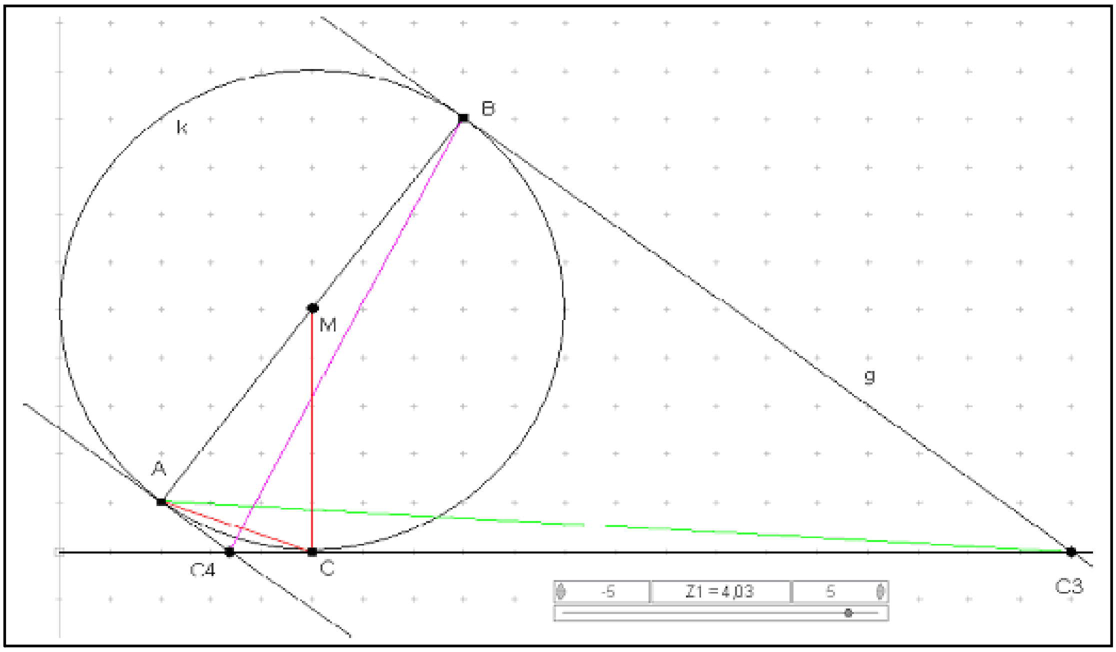
d1) Im Spezialfall $t = 3$ wird der ursprüngliche Punkt $A(2|-3)$ auf die x-Achse geschoben. Dadurch schneiden sowohl die Tangente in A als auch der Thaleskreis k die x-Achse im Punkt A, so dass zwei der ursprünglich vier Lösungsdreiecke zu einem Strich entarten. Es bleiben nur 2 Lösungen übrig (Dreiecke ABC_1 und ABC_3).



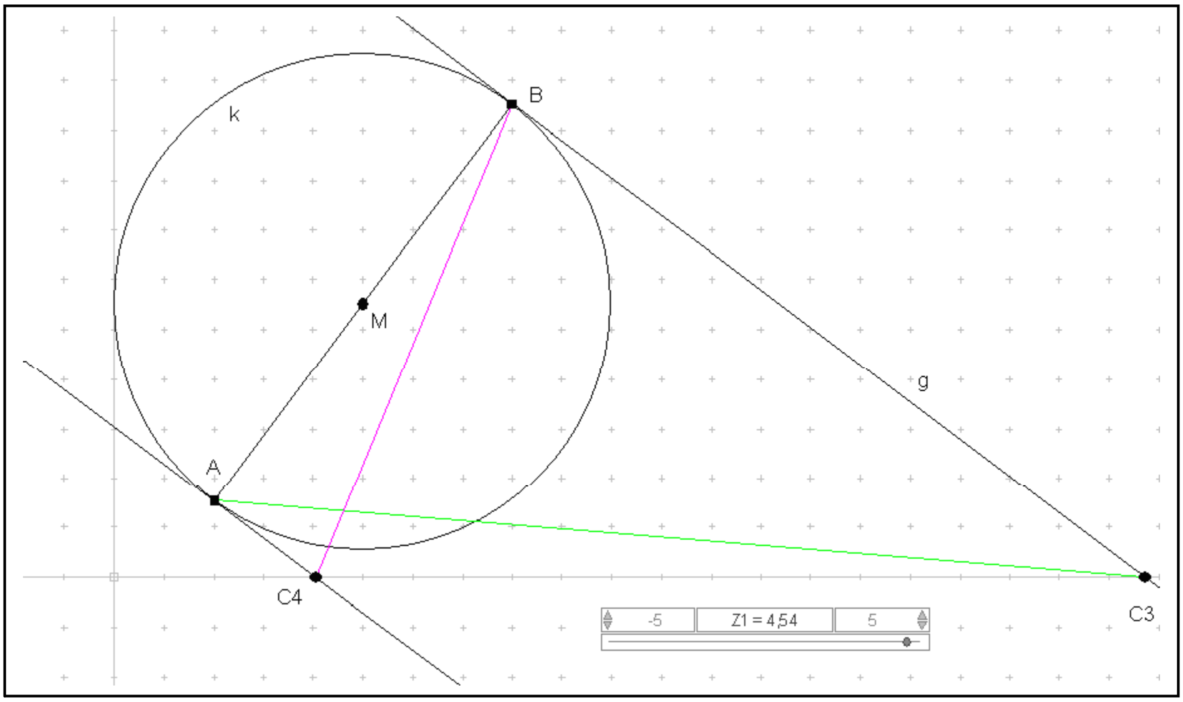
d2) Für Werte $3 < t < 4$ gibt es wieder 4 Lösungen, die jetzt alle gleich orientiert sind. Der Durchmesser $\overline{AB}$ schneidet die x-Achse nicht mehr, liegt aber noch tief genug, damit der Thaleskreis k noch zwei Schnittpunkte mit der x-Achse aufweist.



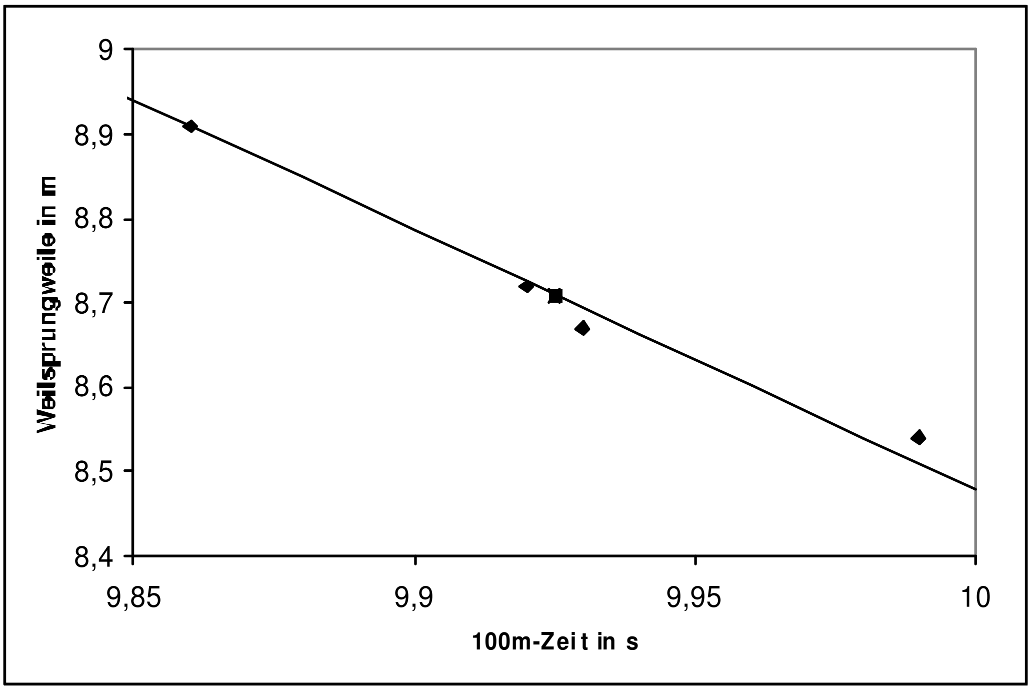
d3) Im Spezialfall $t = 4$ wird der ursprüngliche Mittelpunkt $M(5|1)$ auf die Position $M(5|5)$ verschoben. Da der Radius genau 5 beträgt, berührt der Thaleskreis k die x-Achse im Punkt $C(5|0)$. Somit fallen die beiden Schnittpunkte des Thaleskreises mit der x-Achse in einem Punkt zusammen, so dass nur noch 3 Schnittpunkte bzw. Lösungen vorhanden sind (Dreiecke ABC, ABC_3 und ABC_4).



d4) Für $t > 4$ liegt der Thaleskreis k ganz im 1. Quadranten und schneidet die x-Achse nicht mehr. Die Nullstellen der Tangenten in A resp. B liefern weiterhin noch zwei Lösungen.



5. Aufgabe



a) Die höheren Geschwindigkeiten im Laufen führen vermutlich auch zu höheren Absprunggeschwindigkeiten beim Weitsprung und damit zu größeren Weiten.

b) Es gilt $\overline{x} = 9{,}925$ und $\overline{y} = 8{,}71$. Zeichnung: siehe Lösung zu a). Damit ergibt sich als Steigung der Geraden $\frac{8{,}91 - 8{,}71}{9{,}86 - 9{,}925} \approx -3{,}08$ und damit als Geradengleichung: $y = -3{,}08x + 39{,}25$.

c) Der Ansatz $8{,}62 = -2{,}86x + 37{,}08$ liefert $x \approx 9{,}95$. Der Ansatz $8{,}62 = -3{,}08x + 39{,}25$ führt zu x ≈ 9,95.

d) Für Laufzeiten größer als 12,97s liefert die Regressiongerade negative Sprungweiten, also keinen sinnvollen Zusammenhang der beiden Größen. Unrealistische Werte erhält man auch noch, wenn die Laufzeit etwas kleiner als 12,97s ist: So erhält man bei $x = 12s$ eine Sprungweite von 2,76m. (Es reicht die Angabe eines konkreten Beipiels.)

e) Die Methode der kleinsten Quadrate: Die gesuchte Regressionsgerade g, die durch den Datenschwerpunkt verläuft, besitzt den Funktionsterm $g(x) = m \cdot (x - \overline{x}) + \overline{y}$. m ist nun so zu bestimmen, dass der Term $[y_1 - g(x_1)]^2 + \ldots + [y_n - g(x_n)]^2$ nach Einsetzen von x_i, y_i minimal wird. Die Methode der kleinsten Quadrate ist überzeugender, denn sie berücksichtigt alle Wertepaare mit gleicher Gewichtung, bei der Methode aus b) erhält ein Wertepaar besonderes Gewicht.

Hinweis zur Rundungsproblematik: Durch Zwischenrunden können unterschiedliche Ergebnisse entstehen. Die Bewertung bleibt dem Fachlehrer je nach den Gepflogenheiten im Unterricht überlassen.

Punktierung:

Vorbemerkung:

Falls Sie als Fachlehrer beabsichtigen, die Ergebnisse an die zuständige Bezirksregierung einzusenden und somit an der Auswertung teilzunehmen, sollten Sie von dem vorgegebenen Punkteraster **nicht** abweichen, also insbesondere keine Zusatzpunkte vergeben.
Zur leichteren Auswertung ist ein Excel-Arbeitsblatt als Anlage hinzugefügt worden. Sie werden gebeten, dieses nach Möglichkeit zu verwenden. Dies wäre für die Auswertung eine große Hilfe.

1. Aufgabe

1a	1b	1c
11	4	3

2. Aufgabe

2a	2b	2c	2d	2e	2f
1	2	5	4	3	3

3. Aufgabe

3a	3b	3c	3d	3e	3f
3	3	3	3	3	3

Für die Aufgaben 3a bis 3d und 3f gilt: 0 Fehler ergibt 3 Punkte, 1 Fehler ergibt 1,5 Punkte, 2 Fehler ergeben 0,5 Punkte, ab 3 Fehler 0 Punkte.
Für die Aufgabe 3e gilt: 0 Fehler ergibt 3 Punkte, 1 Fehler ergibt 1,5 Punkte, ab 2 Fehlern werden 0 Punkte vergeben.
Als Fehler gilt, wenn ein Kästchen fälschlich angekreuzt bzw. nicht angekreuzt ist.

4. Aufgabe

4a	4b	4c	4d
6	4	4	4

5. Aufgabe

5a	5b	5c	5d	5e
5	3	3	3	4