Lösungen

Aufgabe 1

a) Die Ableitungen: $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}$, $f''(x)=3x-2$, $f'''(x)=3$ Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist: $f'(x)=0$. Ermittlung der Kandidaten: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}=0$ $x^2-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{19}{9}} \vee x=\frac{2}{3}+\sqrt{\frac{19}{9}}$ Kandidaten: x_1 ˜ -0,79 x_2 ˜ 2,12 Hinreichende Bedingung: $f'(x)=0 \wedge f''(x)\neq 0$ $f''(x_1)\approx f''(-0{,}79)=3\cdot(-0{,}79)-2<0$ $f''(x_2)\approx f''(2{,}12)=3\cdot 2{,}12-2>0$ Es ergibt sich ein Maximum für x_1 ˜ -0,79 und ein Minimum für x_2 ˜ 2,12. Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle ist: $f''(x)=0$. Ermittlung des Kandidaten: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ Da $f'''(x)\neq 0$ für alle x ist, ist auch die hinreichende Bedingung $f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0$ an dieser Stelle erfüllt.	1,5 2,5 2 2 1
b) P_0 hat die y-Koordinate 3. Aus dem Ansatz $t: y=mx+b$ folgt sofort b = 3. Die Ableitung ergibt sich aus $m=f'(0)=-\frac{5}{2}$. Die Tangentengleichung lautet also $t: y=-\frac{5}{2}x+3$.	2 1 1
c) Weitere Schnittpunkte ergeben sich aus dem Ansatz: $f(x)=t(x)$ $\frac{1}{2}x^3-x^2-\frac{5}{2}x+3=-\frac{5}{2}x+3 \Leftrightarrow x^2(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$. Für $x=2$ ist $y=-2$, also ist $S(2;-2)$ der zweite gemeinsame Punkt von Tangente und Funktionsgraph.	1 2 1

Aufgabe 2

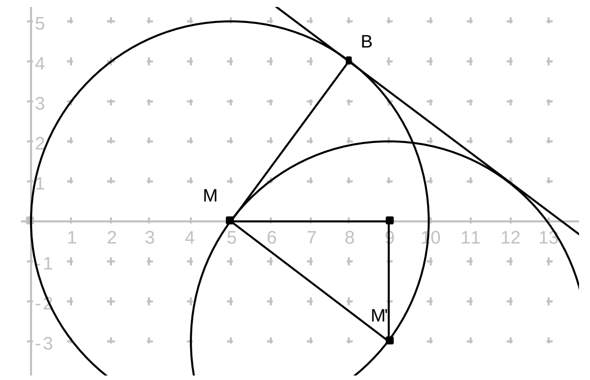
Der Graph von c gehört zur Funktion f mit $f(x) = x(x+2)^2$. Eine Lösungsmöglichkeit: Da die Funktion bei $x = -2$ eine doppelte Nullstelle und bei $x = 0$ eine einfache Nullstelle hat, kommen nur b und c in Frage. Weil zudem die Funktionswerte für $x < -2$ negativ sein müssen, ist c der zugehörige Graph.	1 3

Aufgabe 3

a) Die Produktion bis 13 Uhr wird angegeben durch $v(7)$. Damit gilt $v(7) = -7^3 + 20 \cdot 7^2 = 637$, d.h. der Baum produziert bis 13 Uhr insgesamt 637 Liter Sauerstoff. Die durchschnittliche Produktion pro Stunde in dem angegebenen Zeitraum wird bestimmt durch $\frac{v(11)-v(7)}{11-7} = \frac{1089-637}{4} = 113$, d.h. die durchschnittliche Produktion beträgt zwischen 13 Uhr und 17 Uhr 113 Liter pro Stunde.	1 2
b) Für die Produktion in den angegebenen Zeiträumen gilt: $v(9) - v(7) = 254$ bzw. $v(11) - v(9) = 198$. Damit ergibt sich : $P_{diff} = \frac{254-198}{254} = \frac{56}{254} \approx 0{,}2204$, d.h. die Produktion hat sich um ca 22,0 % verringert.	2 2
c) $v'(t) = -3t^2 + 40t \Rightarrow v'(5) = 125$ (Liter pro Stunde). Mögliche Erläuterung : Zu diesem Zeitpunkt beträgt die Produktion 125 Liter pro Stunde. Nicht akzeptiert werden sollten innermathematische Formulierungen wie: "Die Tangente hat die Steigung 125." o.ä..	1 2
d) Mögliche begründete Vermutungen über den gesuchten Zeitpunkt: - aus dem Kontext : höchste Lichtintensität gegen ca. 12 Uhr. - aus dem Graphen: stärkste Steigung am Wendepunkt etwa zwischen $t = 6$ und $t = 7$. Erläuterung der Berechnung mit dem im Unterricht behandelten Verfahren zur Bestimmung des Wendepunktes (z.B. notwendige Bedingung $v''(t_w) = 0$; hinreichende Bedingung $v''(t_w) = 0$ und $v'''(t_w) \neq 0$). Eine Berechnung liefert als gesuchten Zeitpunkt $t_w = \frac{20}{3}$, d.h. die maximale Produktion wird um 12.40 Uhr erreicht.	1 2

Aufgabe 4 / Alternative 1 (Analytische Geometrie)

a)	Nach Kreisgleichung gilt $(x-5)^2 + y^2 = 5^2$. Man löst nach y^2 auf und erhält $y^2 = 10x - x^2$.	1 1



b)	MB hat die Steigung $m_1 = \frac{4}{3}$, also hat die Tangente die Steigung $m = -\frac{3}{4}$. Dann ergibt sich die Geradengleichung durch Einsetzen von B und *m*: $4 = -\frac{3}{4} \cdot 8 + b$, und man erhält $y = -\frac{3}{4}x + 10$.	2 2 2
c)	Siehe Zeichnung.	1
d)	Die Tangente aus b ist vermutlich auch Tangente an den neuen Kreis. Begründung der Vermutung: Die Gerade MM' hat auch die Steigung $-\frac{3}{4}$. MM' und die Tangente liegen parallel, der Kreis wird also auch parallel verschoben: Die Tangente bleibt Tangente.	1 2

Aufgabe 4 / Alternative 2 (Beschreibende Statistik)

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>a) Siehe Zeichnung.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b) Man erhält $\overline{x} = 163{,}88cm$ und $\overline{y} = 52{,}5kg$.
Die Regressionsgerade hat dann die Steigung
$m = \frac{52{,}5 - 56}{163{,}88 - 169} \approx 0{,}684$.
Und man erhält als anschauliche Regressionsgerade
$y = 0{,}684 \cdot x - 59{,}6$</td><td>2
2
2</td></tr>
<tr><td>c) Man erhält durch Einsetzen in die Geradengleichung ca. 62kg.</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">d) Idee der Methode der kleinsten Quadrate: Die gesuchte Regressionsgerade g durch den Datenschwerpunkt wird so gewählt, dass die Summe
$[y_1 - g(x_1)]^2 + \ldots + [y_n - g(x_n)]^2$
für die Punktwolke $(x_i; y_i)$, i=1...n, minimal wird.</td><td>3</td></tr>
</table>