Vergleichsklausur 2006 für Jahrgangsstufe 11

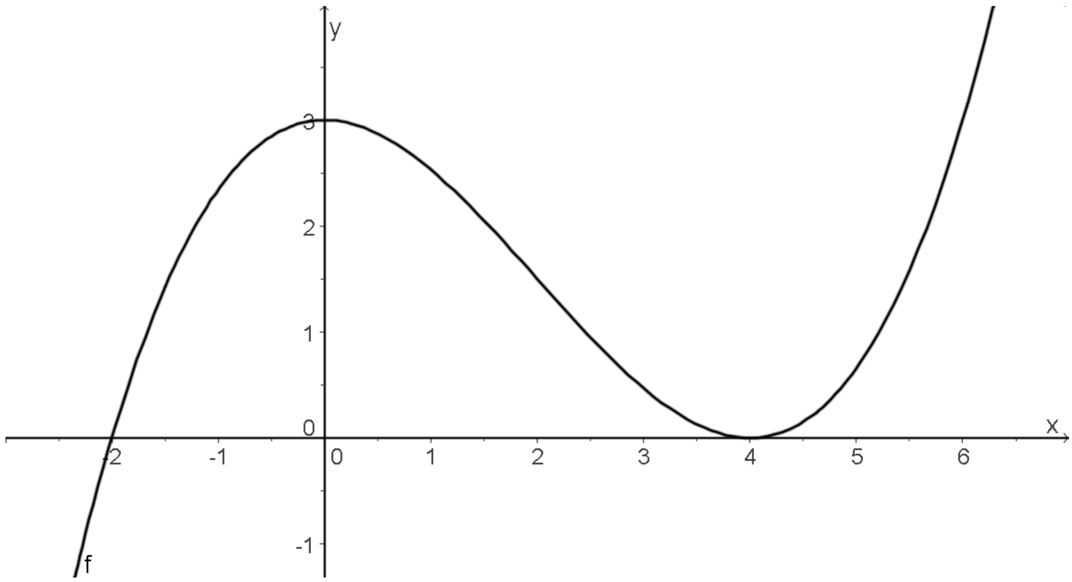
Termin: 31.05.2006, 3. und 4. Stunde **reine Arbeitszeit: 90 min**

Jeder Schüler muss drei Aufgaben bearbeiten.
Die 1. Aufgabe und 2. Aufgabe (Analysis) sind verpflichtende Aufgaben für alle Schüler.
Zusätzlich muss der Fachlehrer für seinen Kurs entweder die 3. Aufgabe (Koordinatengeometrie) oder die 4. Aufgabe (beschreibende Statistik) zur Bearbeitung auswählen.

1. Aufgabe

Die folgende Zeichnung zeigt den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{3}{32}x^3 - \frac{9}{16}x^2 + 3\,.$$



a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph in $(0|3)$ und $(4|0)$ Extrempunkte hat.

b) Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen.
Begründen Sie, dass jede ganzrationale Funktion dritten Grades genau einen Wendepunkt hat.

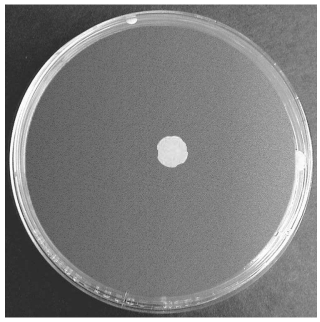
c) Die Tangente an den Graphen an der Stelle $x = 2$ schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

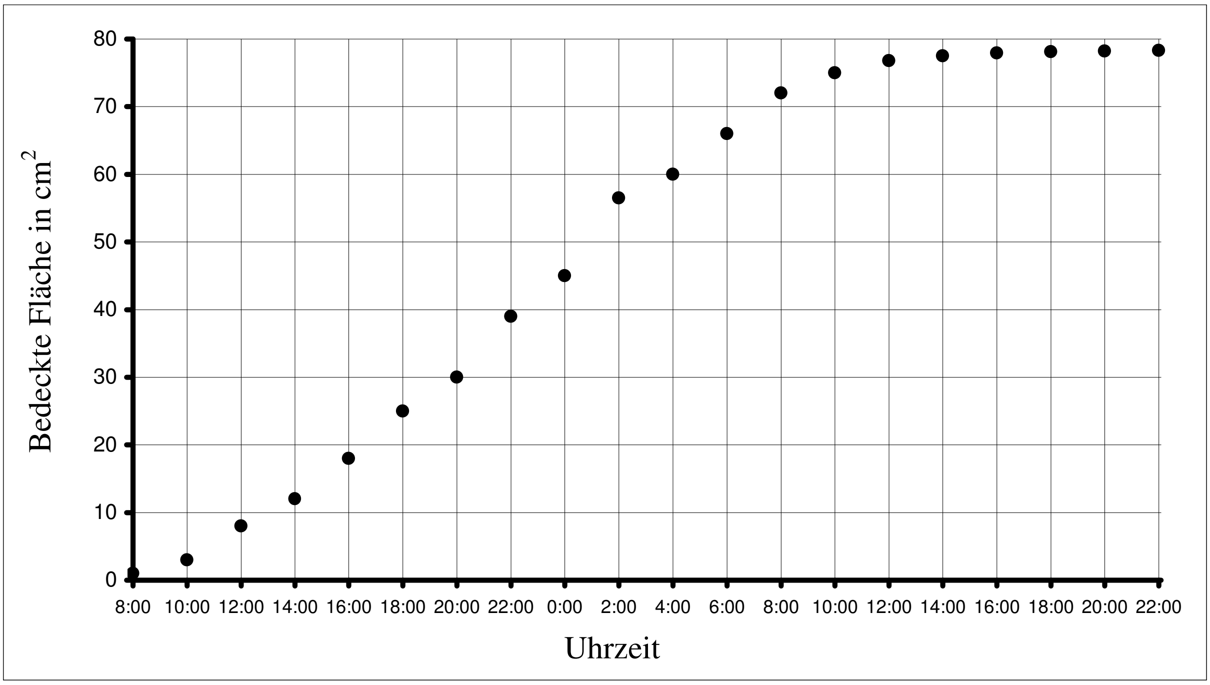
d) Zeichnen Sie die Gerade durch die beiden Extrempunkte in die obige Zeichnung ein.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass diese Gerade nicht mit der Wendetangente übereinstimmt.

e) Der Graph schließt zwischen $x = 0$ und $x = 4$ mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.
Ermitteln Sie die Größe dieser Fläche auf möglichst geschickte Weise.

2. Aufgabe

Ein Wissenschaftler hat im Rahmen einer Forschungsarbeit das Wachstum einer Bakterienkultur in einem Gefäß beobachtet. Alle zwei Stunden wurde von ihm die Größe der von den Bakterien bedeckten Fläche gemessen.
Seine Messwerte sind in folgendem Koordinatensystem dargestellt:





Der Wissenschaftler modelliert die Messreihe durch die folgende Funktion:

$$A(t) = -0{,}005\,t^3 + 0{,}2\,t^2 + 0{,}9\,t + 1$$

$A(t)$: Fläche (Einheit: cm^2)

t: Zeit seit dem Beobachtungsbeginn um 8.00 Uhr (Einheit: h)

Mit dieser Funktion ist es nun möglich, die Fragestellungen in den Aufgaben a) bis c) bearbeiten.

a) Berechnen Sie die Größe der um 5.00 Uhr nachts von Bakterien bedeckten Fläche.

b) Bestimmen Sie die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit der Bakterienkultur (in $\frac{\text{cm}^2}{\text{h}}$) zwischen dem Beobachtungsbeginn und 5.00 Uhr nachts.

c) Wann ist die Wachstumsgeschwindigkeit genauso groß wie zu Beginn der Beobachtung?
Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Bakterienkultur am schnellsten wächst.
Bis zu welchem Zeitpunkt wächst im vorgegebenen Modell die bedeckte Fläche?

d) Ein Kollege des Wissenschaftlers ist der Meinung, dass die zur Modellierung verwendete Funktion das Versuchsergebnis nicht angemessen beschreibt.
Geben Sie mindestens einen Grund für die Kritik des Kollegen an.

3. Aufgabe

a) In der **Anlage zu Aufgabe 3** sind eine Gerade g_1 und ein Kreis k dargestellt.
Ermitteln Sie die Gleichungen von g_1 und k.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte A_1 und B_1 der Geraden g_1 mit dem Kreis k.

b) Zeichnen Sie in die **Anlage zu Aufgabe 3** die Gerade g_2 ein, die durch den Ursprung O und durch den Punkt $T(6|8)$ verläuft.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass T auf dem Kreis liegt und dass der Winkel $\sphericalangle OTM$ ein rechter Winkel ist.

c) Die vom Ursprung O ausgehenden Strecken $\overline{OA_1}$ und $\overline{OB_1}$ bezeichnet man als Sekantenabschnitte.
Zeigen Sie durch eine exakte Rechnung, dass für die Länge der Sekantenabschnitte gilt: $\overline{OA_1} \cdot \overline{OB_1} = 100$.
(Hinweis: Falls Sie A_1 und B_1 in Aufgabe a) nicht berechnen konnten, können Sie die ganzzahligen Koordinaten der Zeichnung entnehmen.)

d) In einem Mathematikbuch findet man folgenden geometrischen Sachverhalt:
„Gegeben ist ein Kreis k. Für alle Ursprungsgeraden g, die diesen Kreis k in zwei Punkten A und B schneiden, ist das Produkt $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ gleich groß.“
Untersuchen Sie, ob sich diese Aussage sinnvoll auf die Tangente g_2 erweitern lässt.

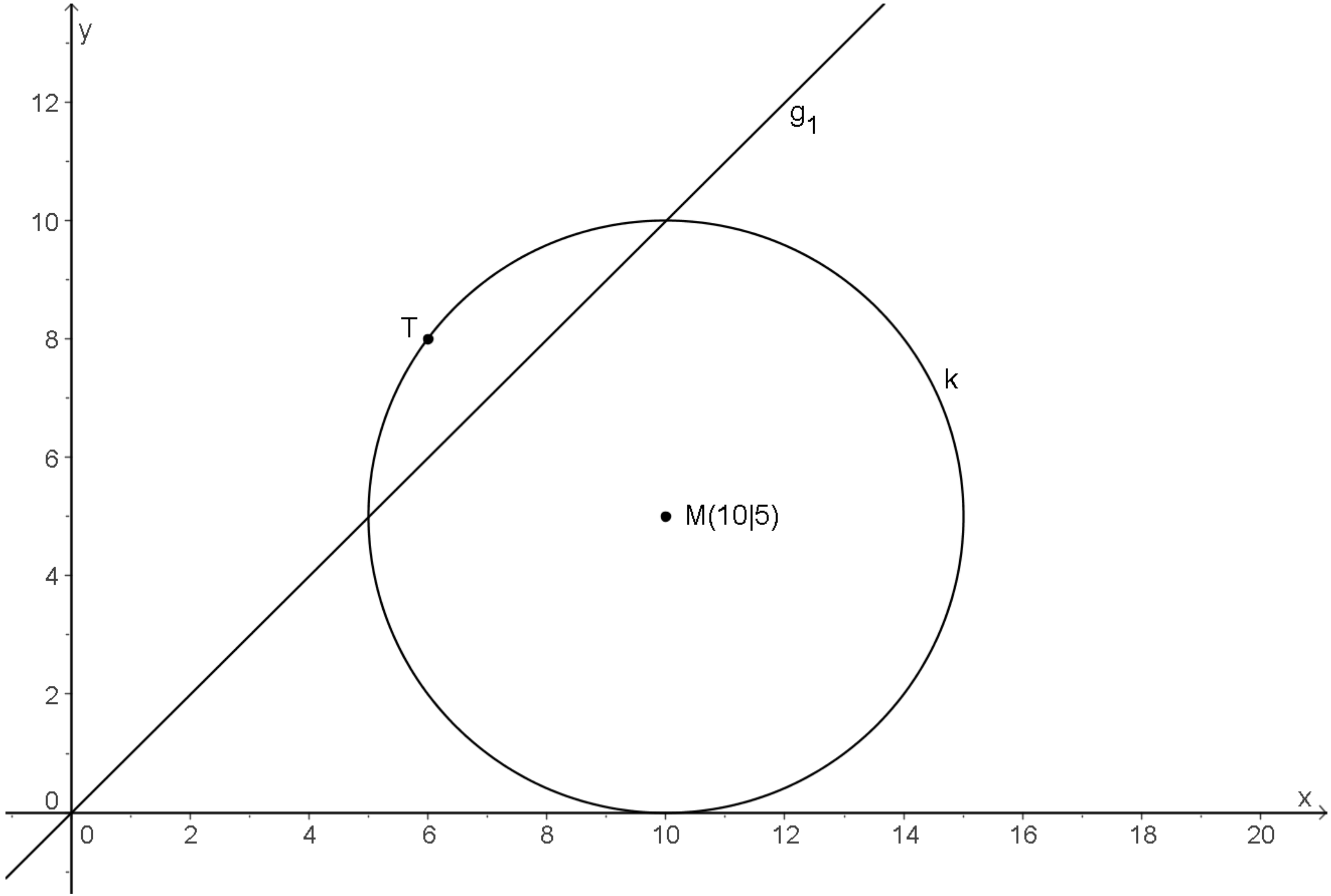
Hinweis zur Aufgabe

Wegen der unterschiedlichen Schreibweisen in den Schulbüchern weisen wir darauf hin, dass die Schreibweise $\overline{OA}$ zweierlei bedeuten kann:

(1) *die Strecke* zwischen den Endpunkten O und A
(2) *die Länge der Strecke* zwischen O und A.

Manche Schulbücher schreiben für die Länge der Strecke stattdessen $|OA|$ bzw. $|\overline{OA}|$.

Anlage zu Aufgabe 3

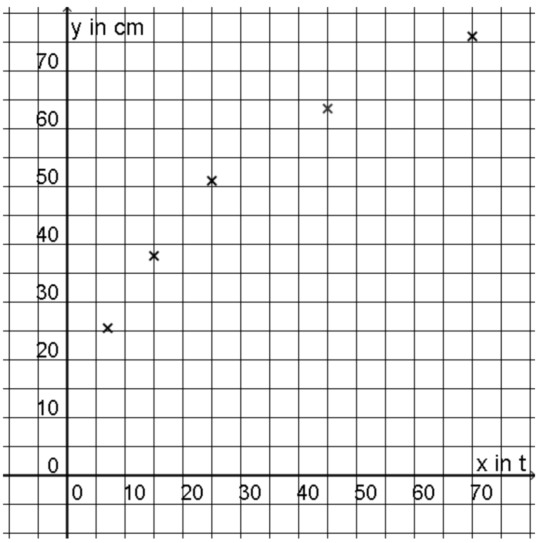


4. Aufgabe

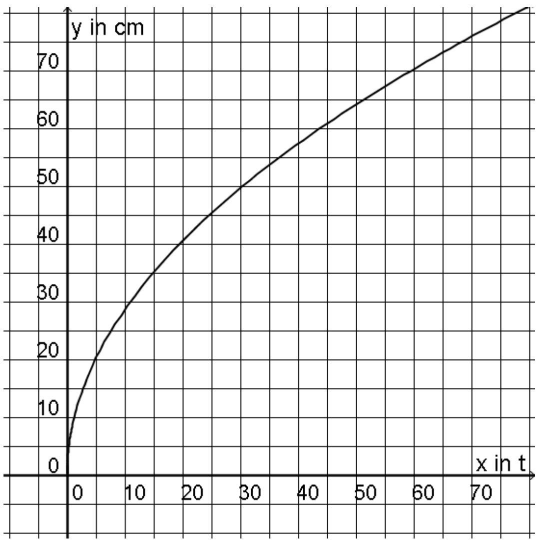
In vielen Ländern mit sehr kaltem Winter ist es selbstverständlich, dass Autos, auch Lkws, über zugefrorene Seen fahren.
Die Tabelle gibt eine ungefähre Vorstellung von der theoretisch „sicheren“ Eisdicke für unterschiedliche Gewichte (nach Schotts Sammelsurium, Berlin 2004, S. 15).

Belastung x in t	Dicke y in cm
7	25,5
15	38
25	51
45	63,5
70	76

a) Im Koordinatensystem 1 sind die fünf Datenpunkte dargestellt. Berechnet man hierzu die Gleichung der Regressionsgeraden, so erhält man y = 0,77x + 26 (gerundet).
Berechnen Sie den Datenschwerpunkt und zeichnen Sie die Regressionsgerade in das Koordinatensystem 1 ein.



Koordinatensystem 1



Koordinatensystem 2

b) Berechnen Sie den Schätzwert für die „sichere“ Eisdicke bei einer Belastung von 40 t mit der Gleichung der Regressionsgeraden.
Wird Ihrer Meinung nach die tatsächliche „sichere“ Eisdicke größer oder kleiner als dieser Schätzwert sein? Begründen Sie mit Hilfe der Zeichnung aus a).

c) In der kanadischen Provinz Manitoba verwendet man ein anderes Verfahren: Man benutzt eine Wurzelfunktion, um aus der bekannten Belastung durch das Fahrzeuggewicht x in t die notwendige Eisdicke y in cm zu schätzen. Bezogen auf unsere Daten verwenden wir hier $y = 9{,}08 \cdot \sqrt{x}$. Der zugehörige Graph ist in Koordinatensystem 2 abgebildet.
Berechnen Sie mit dieser Funktion einen Schätzwert für die mögliche Belastung bei einer gemessenen Eisdicke von 55 cm.

Teilaufgaben d) und e) folgen

d) Ermitteln Sie mit Hilfe einer Methode Ihrer Wahl, ob der Graph der Wurzelfunktion oder der Graph der linearen Funktion besser zu den ersten drei Datenpunkten passt.

e) Welche der beiden Funktionen ist besser geeignet, um die „sichere“ Eisdicke bei größeren Belastungen als 70 t zu schätzen? Begründen Sie Ihre Meinung.