Lernvoraussetzungen:

Wegen der großen Beliebtheit der Multiple-Choice-Aufgabe wird diese Aufgabenform auch diesmal angeboten. Um Täuschungsversuchen zumindest vorzubeugen, wird diese Aufgabe in zwei Versionen angeboten, so dass bei der Klausur zwei Gruppen gebildet werden können.

Für alle Aufgaben:

Geraden und Geradengleichungen

Analysis

1. Kriterien zur Kurvendiskussion, Monotonie
2. Linearfaktorzerlegung, Polynomdivision
3. Tangente und Normale
4. Kenntnisse über die wechselseitige Beziehung zwischen dem Graphen einer Funktion und den Graphen ihrer ersten und ihrer zweiten Ableitungsfunktion.
5. Fähigkeiten zur analytischen Beschreibung von Eigenschaften ganzrationaler Funktionen.
6. Die Schülerinnen und Schüler sollten Modellbildungsprozesse im Rahmen der Behandlung der Differentialrechnung in unterschiedlichen Sachkontexten kennen gelernt haben. Darüber hinaus sollten sie gewohnt sein, längere Texte zu lesen und daraus relevante Informationen zu entnehmen (Lesekompetenz). Problemlösestrategien wie z.B. die Berechnung von Näherungswerten oder Entnahme von Lösungen aus Zeichnungen sollten bekannt sein.

Geometrie

1. Kreis und Kreisgleichung (bei beliebigem Mittelpunkt)
2. Tangente und Tangentengleichung beim Kreis
3. Thaleskreis
4. Anfertigung übersichtlicher Zeichnungen (Zirkel wird benötigt)
5. Verständnis für Variationen einer geometrischen Aufgabenstellung

Statistik

1. Schwerpunkt einer Punktwolke
2. Vorhersagen mit Hilfe von Regressionsgeraden
3. Idee der Methode der kleinsten Quadrate (Berechnung von Regressionsgeraden ist nicht erforderlich)

Vergleichsklausur 2005 für Klassenstufe 11

Termin: 8. Juni 2005, 3. und 4. Stunde **reine Arbeitszeit: 90 min**

Von den drei Analysisaufgaben werden zwei, von den Aufgaben zur Geometrie und zur beschreibenden Statistik wird eine Aufgabe vom Fachlehrer ausgewählt. Diese drei Aufgaben sind dann von den Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.

1. Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte und den Wendepunkt des Graphen von f. Skizzieren Sie den Graphen im Intervall von -1 bis 2.

b) Berechnen Sie die Gleichung der Normale im Wendepunkt.

c) Wir betrachten nun die Funktion w mit $w(x) = a \cdot f(x)$ mit $a > 1$. Wie verändern sich die Lage des Wendepunktes und der Verlauf der Wendetangente, wenn a wächst? Geben Sie eine Begründung an!

2. Aufgabe

In der Sportmedizin kennt man den Begriff der *anaeroben Schwelle*. Dieser Begriff lässt sich vereinfacht folgendermaßen erklären:

Die Energiebereitstellung für eine länger andauernde Bewegung bezeichnet man als *aerob*, wenn durch die Atmung so viel Sauerstoff aufgenommen wird, wie der Körper zur Bewegung benötigt. Steht – etwa bei einer intensiven Belastung – nicht genügend Sauerstoff zur Verfügung, so bildet der Körper zunehmend Laktat (Milchsäure) und die Bewegung wird immer schwerer. Die Energiegewinnung ohne Sauerstoff („anaerob“) spielt dann eine maßgebliche Rolle. Die Grenze zwischen diesen beiden Zuständen heißt *anaerobe Schwelle*.

Die anaerobe Schwelle kann dazu benutzt werden, den Trainingszustand eines Sportlers zu untersuchen. Ein gängiges Verfahren zur Bestimmung der anaeroben Schwelle nutzt die Laktatkonzentration im Blut. Bei der Untersuchung läuft der Sportler auf einem Laufband. Die Geschwindigkeit dieses Laufbandes wird in gleichen Zeitabständen gleichmäßig erhöht. Dabei wird immer wieder die Laktatkonzentration im Blut gemessen. Je höher die Geschwindigkeit ist, bei der der Sportler die anaerobe Schwelle erreicht, desto besser ist sein Trainingszustand.

Bei einem bestimmten Sportler A wird diese Untersuchung durchgeführt. Dabei ergibt sich aus den Messwerten näherungsweise die in Abbildung 1 gezeichnete Laktatkurve. Diese kann für $7 \le x \le 18$ durch folgende Gleichung dargestellt werden

$$f(x) = 0{,}03x^3 - 0{,}918x^2 + 9x - 25\ .$$

x bezeichnet dabei die Laufgeschwindigkeit in $\frac{km}{h}$, f(x) die Laktatkonzentration in Millimol pro Liter.

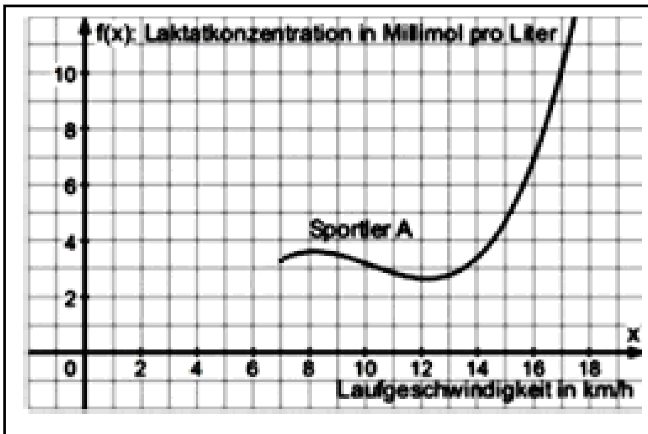


Abbildung 1

a) Berechnen Sie die Laktatkonzentration, die sich für Sportler A bei $16\frac{km}{h}$ ergibt!

b) Zur Berechnung der anaeroben Schwelle gibt es zwei unterschiedliche mathematische Modelle. Nach dem Mader-Modell (1976) wird die anaerobe Schwelle bei einer Laktatkonzentration von 4 Millimol pro Liter erreicht. Bestimmen Sie aus der Zeichnung einen Näherungswert für die Geschwindigkeit, bei der die anaerobe Schwelle überschritten wird.

c) Nach dem Modell des Sportmediziners G. Simon (1981) findet man die anaerobe Schwelle, indem man den Punkt der Kurve ermittelt, in dem die Steigung 1 ist. Bestimmen Sie rechnerisch die Geschwindigkeit für die anaerobe Schwelle nach dem Modell von Simon!

d) Bei der abgebildeten Laktatkurve fällt auf (s. Abbildung 1), dass die Laktatkonzentration in einem bestimmten Geschwindigkeitsbereich abnimmt. Berechnen Sie die Grenzen dieses Bereiches!

e) Bei welcher Laufgeschwindigkeit nimmt die Laktatkonzentration am stärksten ab?

f) Abbildung 2 zeigt die Laktatkurve eines Sportlers B, für den die Untersuchung wie für Sportler A durchgeführt wurde. Begründen Sie, welcher der beiden Sportler A und B den besseren Trainingszustand aufweist!

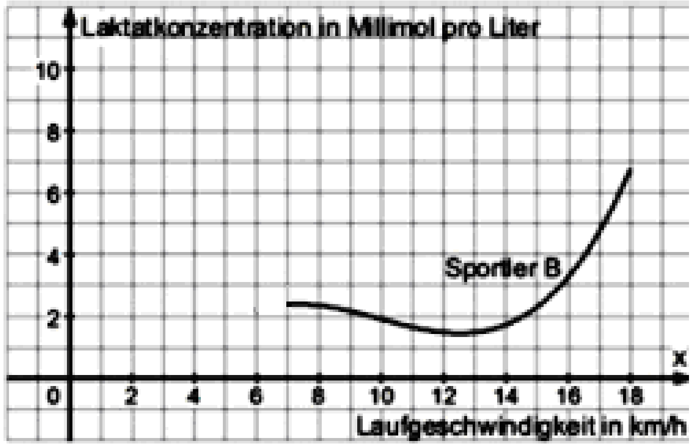


Abbildung 2

3. Aufgabe **Gruppe A**

Bei der folgenden Multiple-Choice-Aufgabe gilt:

- alle richtigen Angaben sind durch Ankreuzen (X) zu kennzeichnen
- es können bis zu vier Angaben pro Aufgabenteil richtig sein
- ein Aufgabenteil gilt nur dann als bearbeitet, wenn wenigstens eine Angabe durch Ankreuzen gekennzeichnet ist

a) Welche der folgenden Aussagen sind für **jede** ganzrationale Funktion 3. Grades zutreffend?

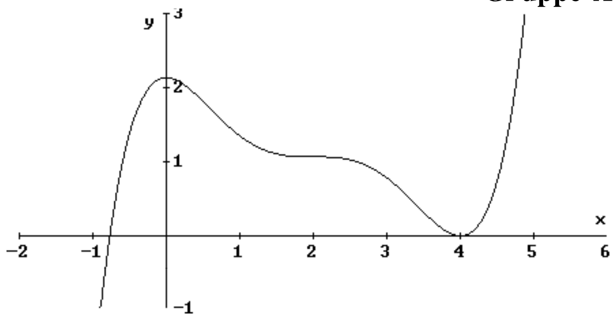
- ☐ Die Funktion hat eine Wendestelle.
- ☐ Die Funktion hat 3 Nullstellen.
- ☐ Die Funktion hat höchstens zwei Extremstellen.
- ☐ Die Funktion hat mindestens eine Nullstelle.
- ☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

b) Welche der folgenden Aussagen über ganzrationale Funktionen sind richtig?

- ☐ Wenn eine Funktion f an einer Stelle x_0 einen Tiefpunkt besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.
- ☐ Liegt in einem Punkt eines Graphen ein Übergang von einer Zunahme der Steigung zu einer Abnahme der Steigung vor, so handelt es sich um einen Wendepunkt.
- ☐ Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 einen Tiefpunkt.
- ☐ Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 keinen Extrempunkt.
- ☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Gruppe A

c) In der nebenstehenden Zeichnung sehen Sie den Graphen einer ganzrationalen Funktion *f*.
Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?



☐ f hat mindestens den Grad 5.

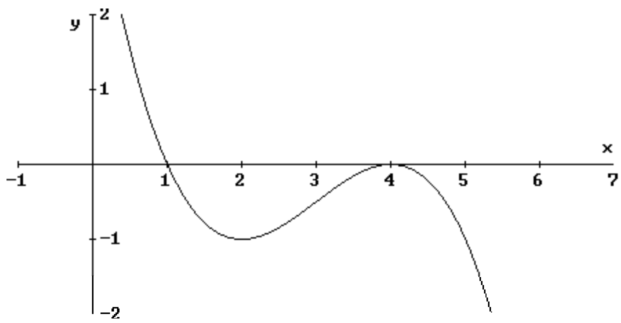
☐ Der Graph der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle 2 einen Extrempunkt.

☐ Die Ableitungsfunktion f' fällt im Bereich von 0 bis 4.

☐ Für $0 < x < 1$ gilt $f'(x) < 0$.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

d) In der nebenstehenden Zeichnung sehen Sie den Graphen einer Ableitungsfunktion f'.
Welche der folgenden Aussagen über die Ausgangsfunktion f sind zutreffend?



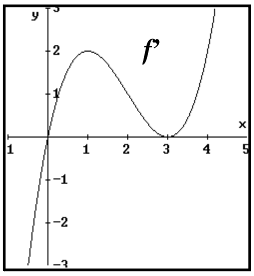
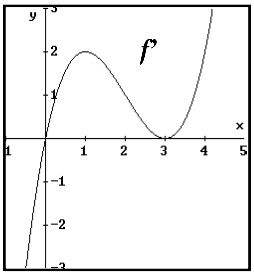
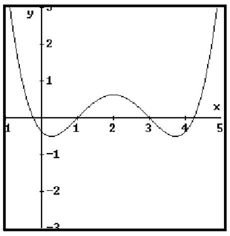
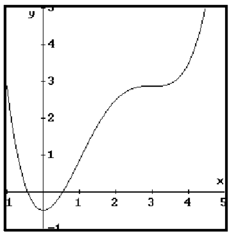
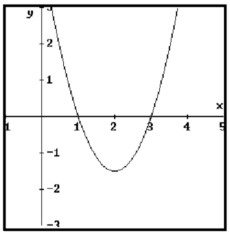
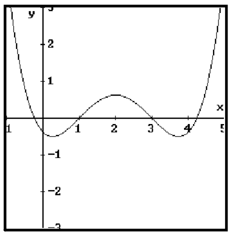
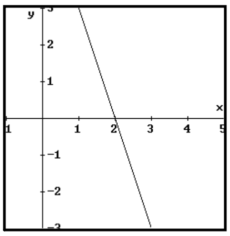
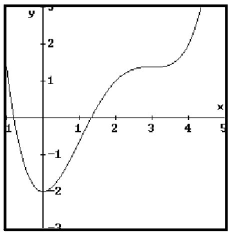
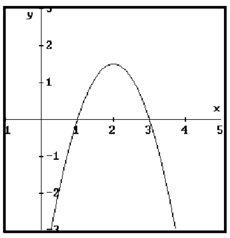
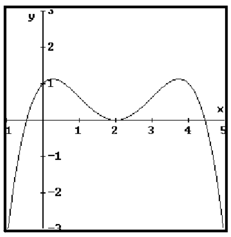
☐ Der Graph von f hat an der Stelle 1 einen Hochpunkt.

☐ Der Graph von f hat an der Stelle 4 einen Tiefpunkt.

☐ f hat im dargestellten Bereich zwei Wendestellen.

☐ Im Intervall von 1 bis 4 ist der Graph von f monoton steigend.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

e)	**f)** **Gruppe A**
 Im Bild sehen Sie den Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.	 Im Bild sehen Sie den Graph der Ableitungsfunktion f' zu einer Funktion f.
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Keiner der Graphen passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Keiner der Graphen passt zu einer Funktion f, deren Ableitung f' ist. ☐

3. Aufgabe **Gruppe B**

Bei der folgenden Multiple-Choice-Aufgabe gilt:

- alle richtigen Angaben sind durch Ankreuzen ($\boxed{\text{X}}$) zu kennzeichnen
- es können bis zu vier Angaben pro Aufgabenteil richtig sein
- ein Aufgabenteil gilt nur dann als bearbeitet, wenn wenigstens eine Angabe durch Ankreuzen gekennzeichnet ist

a) Welche der folgenden Aussagen sind für **jede** ganzrationale Funktion 3. Grades zutreffend?

☐ Die Funktion hat 3 Nullstellen.

☐ Die Funktion hat höchstens zwei Extremstellen.

☐ Die Funktion hat eine Wendestelle.

☐ Die Funktion hat mindestens eine Nullstelle.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

b) Welche der folgenden Aussagen über ganzrationale Funktionen sind richtig?

☐ Liegt in einem Punkt eines Graphen ein Übergang von einer Zunahme der Steigung zu einer Abnahme der Steigung vor, so handelt es sich um einen Wendepunkt.

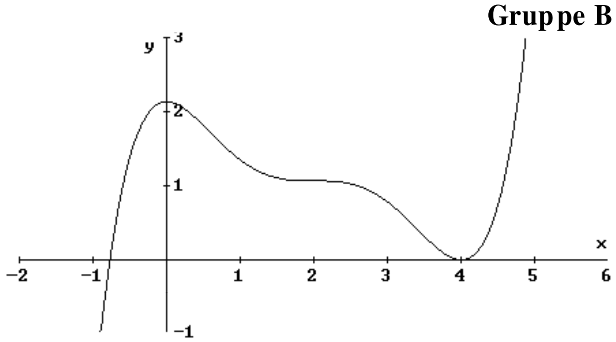
☐ Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 einen Tiefpunkt.

☐ Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 keinen Extrempunkt.

☐ Wenn eine Funktion f an einer Stelle x_0 einen Tiefpunkt besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

c) In der nebenstehenden Zeichnung sehen Sie den Graphen einer ganzrationalen Funktion *f*.
Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?



☐ Der Graph der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle 2 einen Extrempunkt.

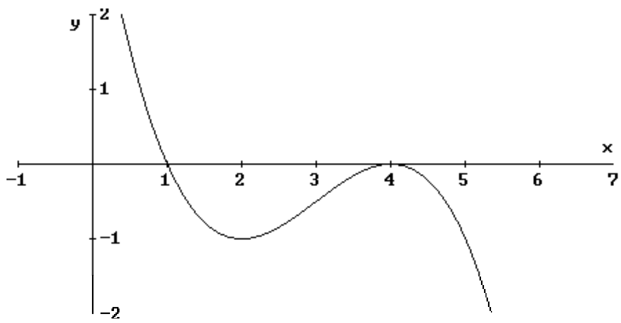
☐ Die Ableitungsfunktion f' fällt im Bereich von 0 bis 4.

☐ Für $0 < x < 1$ gilt $f'(x) < 0$.

☐ f hat mindestens den Grad 5.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

d) In der nebenstehenden Zeichnung sehen Sie den Graphen einer Ableitungsfunktion f'.
Welche der folgenden Aussagen über die Ausgangsfunktion f sind zutreffend?



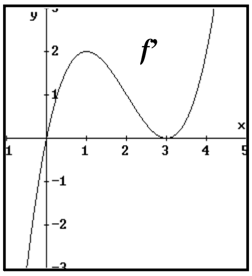
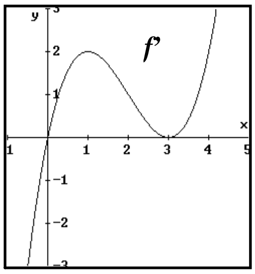
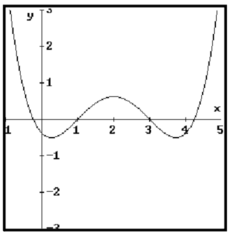
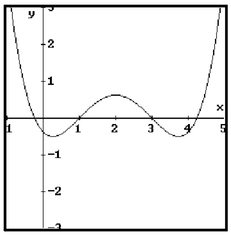
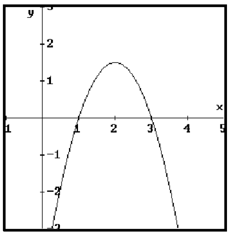
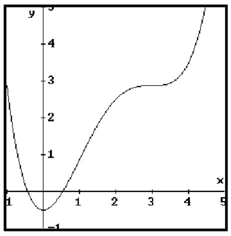
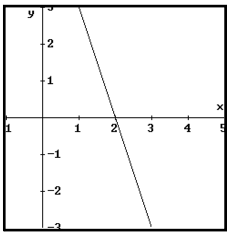
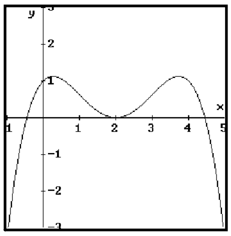
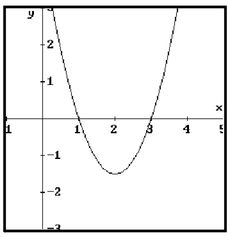
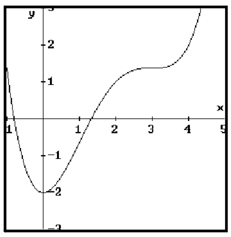
☐ Der Graph von f hat an der Stelle 4 einen Tiefpunkt.

☐ Der Graph von f hat an der Stelle 1 einen Hochpunkt.

☐ Im Intervall von 1 bis 4 ist der Graph von f monoton steigend.

☐ f hat im dargestellten Bereich zwei Wendestellen.

☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

e)	**f)** **Gruppe B**
 Im Bild sehen Sie den Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.	 Im Bild sehen Sie den Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Der Graph  passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Der Graph  passt zur Funktion f. ☐
Keiner der Graphen passt zur zweiten Ableitung f''. ☐	Keiner der Graphen passt zu einer Funktion f, deren Ableitung f' ist. ☐

4. Aufgabe **(Zirkel wird benötigt!)**

In einem Koordinatensystem sind die Punkte $A(2|-3)$ und $B(8|5)$ gegeben. Die Strecke $\overline{AB}$ soll so zu einem rechtwinkligen Dreieck ergänzt werden, dass die dritte Ecke C auf der x-Achse liegt. Es gibt vier Lösungen zu der Aufgabe. Zwei Lösungen findet man, indem man den Thaleskreis verwendet. Der rechte Winkel kann aber auch bei A oder B liegen.

a) Konstruieren Sie zeichnerisch alle Lösungen der Aufgabe. Benutzen Sie für das Koordinatensystem ein eigenes Blatt und wählen Sie dabei für die x-Koordinate einen Bereich von -2 bis 15 sowie für die y-Koordinate von -5 bis 10. Nehmen Sie 1cm für eine Einheit.

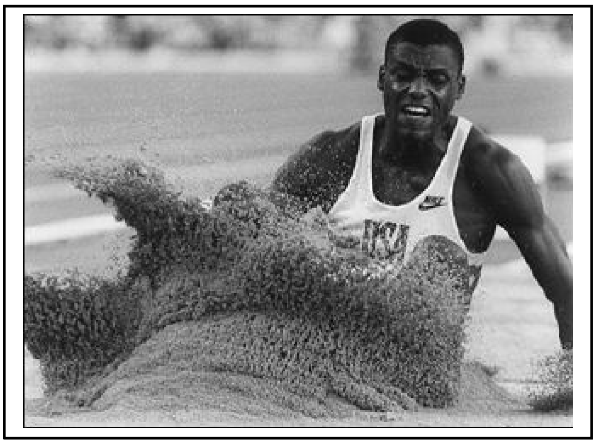
b) Ermitteln Sie die Gleichungen für den Thaleskreis k und für seine Tangente g in B.

c) Berechnen Sie die Schnittstellen von k mit der x-Achse und die Schnittstelle von g mit der x-Achse.

d) Bei der bisherigen Lage der Strecke $\overline{AB}$ ergeben sich vier Dreiecke (siehe Aufgabe a)). Durch Verschieben der Strecke $\overline{AB}$ parallel zur y-Achse nach oben verändern sich die Dreiecke. Dabei kann sich auch die Anzahl n der möglichen Dreiecke verändern. Skizzieren Sie die Situation für zwei verschiedene Fälle, in denen die Anzahl $n \neq 4$ ist.

5. Aufgabe

Carl Lewis war einer der erfolgreichsten Leichtathleten des 20. Jahrhunderts. Zwischen 1984 und 1996 gewann er 20 Medaillen bei Olympischen Spielen und Weltmeisterschaften, 17 davon waren Goldmedaillen. Er wurde 1984 mit 4 Goldmedaillen (100m-Lauf, 200m-Lauf, Weitsprung, 4x100m-Staffel) zum Star der Olympischen Spiele in Los Angeles. Carl Lewis gewann 18 nationale Titel und war in seiner Karriere Gewinner von über 200 Wettbewerben.



In der folgenden Tabelle finden Sie die 100m-Zeiten und die Weitsprungweiten, die er zwischen 1984 und 1991 bei Olympischen Spielen und Weltmeisterschaften erzielte.

	Zeit im 100m-Lauf in s	Weite im Weitsprung in m
Olympische Spiele 1984 Los Angeles	9,99	8,54
Weltmeisterschaft 1987 Rom	9,93	8,67
Olympische Spiele 1988 Seoul	9,92	8,72
Weltmeisterschaft 1991 Tokio	9,86	8,91

Bei den folgenden Rechnungen sind die Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen genau zu berechnen und anzugeben.

a) Stellen Sie den Datensatz in einem geeigneten Koordinatensystem dar (waagerechte Achse: 100m-Zeit, senkrechte Achse: Weitsprungweite). Berücksichtigen Sie in der Zeichnung nur den relevanten Bereich auf beiden Achsen.
Wie erklären Sie sich den Zusammenhang der beiden Größen?

b) Errechnen Sie den Schwerpunkt der Punktwolke. Zeichnen Sie eine Gerade durch den Schwerpunkt und den zur Weltmeisterschaft in Tokio gehörenden Datenpunkt. Berechnen Sie die Gleichung dieser Geraden.

c) Mit einem Computerprogramm wurde folgende Gleichung der Regressionsgeraden ermittelt:
$$y = -2{,}86x + 37{,}08$$
Die beste von Carl Lewis im Jahr 1985 in einem Wettbewerb erzielte Weitsprungweite war 8,62 m. Wie schnell könnte er demnach bei diesem Wettbewerb im 100m-Lauf gewesen sein? Berechnen Sie diese Zeit sowohl mit der in Aufgabe b) berechneten Geradengleichung als auch mit der Gleichung der Regressionsgeraden.

d) Außerhalb eines bestimmten Bereichs liefert die Regressionsgerade keinen sinnvollen Zusammenhang von Laufzeit und Sprungweite. Belegen Sie dies anhand eines geeigneten Beispiels aus dieser Aufgabe.

e) Computerprogramme verwenden zur Berechnung von Regressionsgeraden üblicherweise die Methode der kleinsten Quadrate. Beschreiben Sie kurz diese Methode. Warum ist diese Methode überzeugender als die in b) verwendete Methode, bei der eine Gerade durch den Datenschwerpunkt betrachtet wurde?