Online - Team Wettbewerb 2007

des Mathe-Treffs
der Bezirksregierung Düsseldorf

Lösungen für die Sekundarstufe I Stufen 9 und 10

Aufgabe 1 (Verknotet):

a) Jeder Faden ist 20cm lang und wir müssen 2 cm für jeden Knoten abziehen. $2 \cdot 20$ cm – $2 \cdot 2$cm = 40 cm – 4 cm = 36 cm. Für alle Seiten des Quadrats stehen zusammen also 36 cm zur Verfügung. Da ein Quadrat vier Seiten hat und alle Seiten gleich lang sind, ergibt sich eine Seitenlänge von 9 cm. Denn $4 \cdot 9 = 36$.

b) Für alle drei Dreiecksseiten zusammen stehen wieder 36 cm zur Verfügung. Aus dem Aufgabentext ergibt sich, dass die Seite b einen Zentimeter kürzer ist als die Seite a und die Seite c einen Zentimeter länger ist als die Seite a. Was an der einen Seite abgezogen wird, wird bei der anderen hinzugefügt Wären alle Seiten gleich lang, ergäbe sich eine Seitenlänge von 12 cm, denn $3 \cdot 12 = 36$. Also ist a = 12 cm, b = 11 cm und c = 13 cm. Alle drei Seiten zusammen ergeben 36 cm.

c) Betrachten wir zunächst nur eine Seite:
Für den ersten Faden gibt es 5 Verknüpfungsmöglichkeiten. Nehmen wir dann einen der restlichen vier Fäden, hat man für ihn noch 3 Verknüpfungsmöglichkeiten. Es bleiben noch zwei Fäden übrig, die ohne Wahlmöglichkeit verknotet werden müssen.
Pro Seite gibt es also: $5 \cdot 3 = 15$ Möglichkeiten
Zu jeder Verknüpfung auf der linken Seite gibt es also 15 Knotungsmöglichkeiten auf der rechten Seite, die Paula durchführen kann. Insgesamt sind es $15 \cdot 15 = 225$ Verknüpfungsmöglichkeiten.

d) Auf einer Seite gibt es bei 8 Fäden $7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$ Möglichkeiten. Jetzt dürfen wir den Faden auf der anderen Seite mit jedem Faden verknüpfen nur nicht mit dem, mit dem er schon auf der anderen Seite verknüpft ist. Das heißt, wir haben nicht sieben Fäden, sondern nur noch sechs Fäden zur Auswahl. Zu jeder Knotung auf der einen Seite gibt es $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ Möglichkeiten auf der anderen Seite. Multipliziert man die Anzahlen der linken und rechten Seite wieder miteinander ergeben sich 5040 Möglichkeiten. Gleichzeitig sind es 7! – viele Möglichkeiten.

e) Ein faires Spiel bedeutet eine Gewinnchance von 0,5. Paula gewinnt, wenn sie einen einzigen geschlossenen Ring geknüpft hat. Zur Berechnung der Gewinnchance müssen wir die Anzahl der Verknotungsmöglichkeiten, die einen Ring ergeben, durch die Anzahl aller Verknotungsmöglichkeiten teilen. Insgesamt gibt es $105^2 = 11025$ Möglichkeiten. Die Division 5040 : 11025 ergibt eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 0,457. Paula hat also eine Chance, die kleiner als 0,5 ist, das Spiel zu gewinnen. Das Spiel ist also nicht fair.

Aufgabe 2 (Chatroom):

Die Ankunftszeiten von Alexander und Fabian werden mit x und y beschrieben.

Es gelten die beiden Ungleichungen:

$15 \leq x \leq 16$

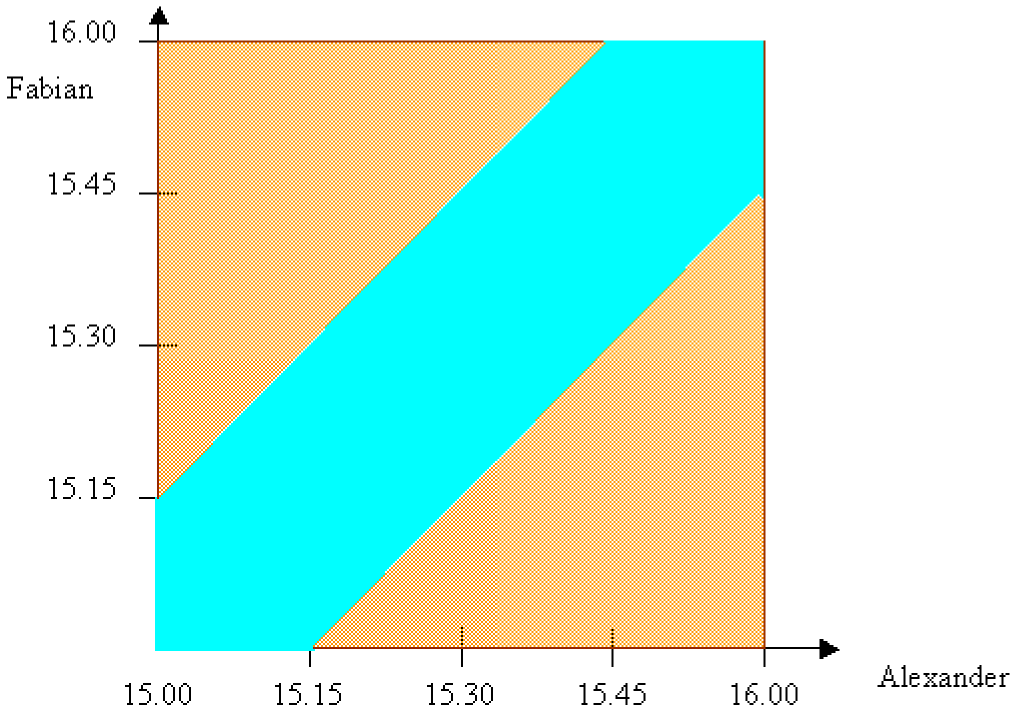
$15 \leq y \leq 16$

Ein Treffen von Alexander und Fabian findet nur dann statt, wenn außerdem die Bedingung

$x - 0,25 \leq y \leq x + 0,25$ gilt.

Durch y = x + 0,25 und y = x - 0,25 werden die beiden Begrenzungsgeraden des blauen Bereichs dargestellt. Das Verhältnis von „günstiger Fläche" zur Gesamtfläche liegt bei

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}.$$



Aufgabe 3 (Partyende)

Liegt ein Verschluss auf dem Tisch, muss Heiner ziehen - es ist das einzige, somit letzte, also er verliert. 1 ist also eine Verlustzahl für Heiner. Bernd gewinnt.

Liegen zwei Colaverschlüsse auf dem Tisch, nimmt er einen und Bernd hat eine Verluststellung. Heiner gewinnt: Zwei (2) ist also eine Gewinnzahl für Heiner.

Für drei (3) gilt: Heiner darf nur einen Verschluss ziehen und überlässt Bernd eine Gewinnstellung.

4 oder 5 Flaschenverschlüsse: Heiner zieht einen oder zwei Korken und hat eine Gewinnstellung.

6 Flaschenverschlüsse: Heiner muss einen oder zwei Verschlüsse ziehen und verliert, weil Bernd eine Gewinnstellung bekommt.

7 oder 8 oder 9 oder 10 oder 11 Flaschenverschlüsse: Heiner muss einen oder zwei oder 3 oder 4 oder 5 Verschlüsse ziehen und gewinnt, weil Bernd eine Verluststellung (6) bekommt. Alle Möglichkeiten sind Gewinnzahlen für Heiner.

12 Flaschenverschlüsse: Heiner darf max. fünf (5) Verschlüsse ziehen und verliert immer, weil Bernd im nächsten Zug eine Gewinnstellung bekommt.

Somit ergeben sich Heiners Verlustzahlen:
1, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, …
oder
die Zahl Eins (1) und alle Glieder der Funktion
$f(n) = 3 \cdot 2^n, n \in IN_0$

Alle anderen Anzahlen sind Gewinnzahlen für Heiner und Verlustzahlen für Bernd.

Die Zahlenfolge 1, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, …stellt die Gewinnzahlen für Bernd dar.

Aufgabe 4 (Die abergläubische Hexe aus dem bergischen Land)

Hierbei handelt es sich um unsere sog. Scherzaufgabe. Es gibt keine eindeutige Lösung. Die Bewertung erfolgt nach Kreativität im Lösungsansatz.
Eine mögliche Lösung könnte so aussehen:

Ich werde drei Tage vor dir sterben. Nun fürchtete die abergläubische Hexe selbst um ihr Leben und gab den Befehl, besonders gut für Lilo zu sorgen.