Aufgabe 1 (Verknotet):

a) Jeder Faden ist 20cm lang und wir müssen 2 cm für jeden Knoten abziehen. $2 \cdot 20$ cm – $2 \cdot 2$cm = 40 cm – 4 cm = 36 cm. Für alle Seiten des Quadrats stehen zusammen also 36 cm zur Verfügung. Da ein Quadrat vier Seiten hat und alle Seiten gleich lang sind, ergibt sich eine Seitenlänge von 9 cm. Denn $4 \cdot 9 = 36$.

b) Für alle drei Dreiecksseiten zusammen stehen wieder 36 cm zur Verfügung. Aus dem Aufgabentext ergibt sich, dass die Seite b einen Zentimeter kürzer ist als die Seite a und die Seite c einen Zentimeter länger ist als die Seite a. Was an der einen Seite abgezogen wird, wird bei der anderen hinzugefügt Wären alle Seiten gleich lang, ergäbe sich eine Seitenlänge von 12 cm, denn $3 \cdot 12 = 36$. Also ist a = 12 cm, b = 11 cm und c = 13 cm. Alle drei Seiten zusammen ergeben 36 cm.

c) Betrachten wir zunächst nur eine Seite:
Für den ersten Faden gibt es 5 Verknüpfungsmöglichkeiten. Nehmen wir dann einen der restlichen vier Fäden, hat man für ihn noch 3 Verknüpfungsmöglichkeiten. Es bleiben noch zwei Fäden übrig, die ohne Wahlmöglichkeit verknotet werden müssen.
Pro Seite gibt es also: $5 \cdot 3 = 15$ Möglichkeiten
Zu jeder Verknüpfung auf der linken Seite gibt es also 15 Knotungsmöglichkeiten auf der rechten Seite, die Paula durchführen kann. Insgesamt sind es $15 \cdot 15 = 225$ Verknüpfungsmöglichkeiten.

d) Auf einer Seite gibt es bei 8 Fäden $7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$ Möglichkeiten. Jetzt dürfen wir den Faden auf der anderen Seite mit jedem Faden verknüpfen nur nicht mit dem, mit dem er schon auf der anderen Seite verknüpft ist. Das heißt, wir haben nicht sieben Fäden, sondern nur noch sechs Fäden zur Auswahl. Zu jeder Knotung auf der einen Seite gibt es $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ Möglichkeiten auf der anderen Seite. Multipliziert man die Anzahlen der linken und rechten Seite wieder miteinander ergeben sich 5040 Möglichkeiten. Gleichzeitig sind es 7! – viele Möglichkeiten.

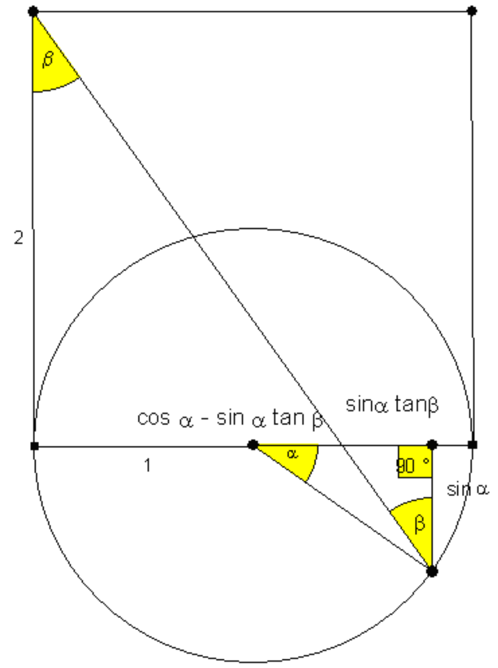
e) Ein faires Spiel bedeutet eine Gewinnchance von 0,5. Paula gewinnt, wenn sie einen einzigen geschlossenen Ring geknüpft hat. Zur Berechnung der Gewinnchance müssen wir die Anzahl der Verknotungsmöglichkeiten, die einen Ring ergeben, durch die Anzahl aller Verknotungsmöglichkeiten teilen. Insgesamt gibt es $105^2 = 11025$ Möglichkeiten. Die Division 5040 : 11025 ergibt eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 0,457. Paula hat also eine Chance, die kleiner als 0,5 ist, das Spiel zu gewinnen. Das Spiel ist also nicht fair.

f) Betrachten wir die Knotungsmöglichkeiten allgemein für n Fäden. Für den ersten Faden haben wir n-1 Knotungsmöglichkeiten. Dann sind noch n-2 – viele Fäden nicht verknotet. Nehmen wir von den losen Fäden einen, gibt es für diesen Faden also noch n – 3 Verknotungsmöglichkeiten. Die Auswahlmöglichkeit ist zu Ende, wenn es nur noch 2 Fäden auf der Seite gibt. So ergeben sich $(n-1) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 1$ Möglichkeiten, insgesamt also $[(n-1)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 1]^2$. Analog zu Aufgabe e) gibt es

$[(n-1)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot1] \cdot [(n-2)\cdot(n-4)\cdot\ldots\cdot2]$ Knotungsmöglichkeiten, die einen einzigen, geschlossenen Ring ergeben.
So ergibt sich folgende Formel für die Gewinnwahrscheinlichkeit p:

$$p = \frac{[(n-1)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot1]\cdot[(n-2)\cdot(n-4)\cdot\ldots\cdot2]}{[(n-1)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot1]^2} = \frac{(n-2)\cdot(n-4)\cdot\ldots\cdot2}{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot1}$$

Aufgabe 2 (Das Stadtwappen):



Untere linke Fläche:

kleine Dreiecksfläche: $\left(\cos\alpha - \sin\alpha\tan\beta\right)\cdot\frac{\sin\alpha}{2}$

große Sektorfläche: $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\ (\alpha \text{ in Bogenmaß})$

große Dreiecksfläche: $1+\cos\alpha-\sin\alpha\tan\beta$

Zwischen alpha und beta besteht folgender Zusammenhang:

$$\frac{1+\cos\alpha}{2+\sin\alpha}=\tan\beta$$

Die gesamte Fläche beträgt: $4+\frac{\pi}{2}$

Somit gilt:

$$\frac{1}{2}\left(4+\frac{\pi}{2}\right)=1+\cos\alpha-\sin\alpha\tan\beta+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+\left(\cos\alpha-\sin\alpha\tan\beta\right)\cdot\frac{\sin\alpha}{2}$$

Daraus folgt folgende Gleichung:

$$2\cos\alpha-\sin\alpha-\alpha-2+\frac{\pi}{2}=0$$

und

$\alpha\approx 35{,}475^\circ;\ \beta\approx 35{,}113^\circ$

Aufgabe 3 (Sprachenwirrwarr)

Es gelten die Voraussetzungen „Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern – verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Ziffern“.

Folgende Gleichungen spiegeln das genannte Problem wider:

$$\begin{array}{rccccc} & & & T & W & O \\ + & & F & I & V & E \\ \hline & S & E & V & E & N \end{array} \qquad \begin{array}{rcccccc} & & & Z & W & E & I \\ + & & F & U & E & N & F \\ \hline & S & I & E & B & E & N \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & D & E & U & X \\ + & C & I & N & Q \\ \hline & S & E & P & T \end{array} \qquad \begin{array}{rccccc} & & & D & O & S \\ + & C & I & N & C & O \\ \hline & S & I & E & T & E \end{array}$$

Eine weitere Möglichkeit für die deutsche Delegation wäre:

$$\begin{array}{rcccccc} & & & Z & W & E & I \\ + & & & F & Ü & N & F \\ \hline & S & I & E & B & E & N \end{array}$$

Die Lösungsversuche im Einzelnen:

Die Aufgabe in Englisch „TWO+FIVE=SEVEN“ hat keine Lösung; denn der Übertrag von der Tausenderposition ergibt S = 1 – gefolgt von F = 9 und E = 0 (nur den Übertrag von der Hunderterposition liefert 1 als Summanden bei der Tausenderposition F + 1 = 10). E = 0 in der Einerspalte führt zu O = N und damit zum Widerspruch innerhalb der Voraussetzungen. Die Aufgabe ist nicht lösbar.

Die Aufgabe in Deutsch „ZWEI+FUENF=SIEBEN“ hat keine Lösung.
Begründung:
Angenommen, die Bedingungen der Aufgabe seien erfüllbar, dann sind F, U, E, N, Z, W, I, S und B sämtlich kleiner oder gleich 9 und es gilt: S, F, Z > 0.
a) S = 1 und F = 9 und I = 0, da die Summanden aus U, Z und dem notwendigen (F nicht gleich I) Übertrag der Hunderter kleiner als 20 und damit 10*S + 0 = F + 1 = 10 gelten muss.
Aus der letzten Spalte der Aufgabe folgt wegen „I = 0“, dass F = N sei, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Daraus folgt aber: Es gibt keine Lösung.

Die Aufgabe in Französisch „DEUX+CINQ=SEPT“ verwendet elf Variable und hat deshalb keine Lösung.

Die Aufgabe in Spanisch “DOS+CINCO=SIETE“ hat keine Lösung, weil die Tausenderspalte keinen Übertrag liefert und damit „C=S“ den Voraussetzungen widerspricht.

Schließlich könnte die Aufgabe in Deutsch auch die Fassung „ZWEI+FÜNF=SIEBEN“ besitzen.
S könnte nur 1 sein auf der Hunderttausenderposition, falls I = 9 auf der Zehntausenderposition gilt und ein Übertrag durch die Tausender erfolgte. Dieser Übertrag liefert aber höchstens 1, weil die Summe zweier einstelliger Zahlen und eines eventuellen Übertrags 1 kleiner als 20 bleibt. Das bedeutet aber I = 1 auf den Zehntausendern, was als S = I nicht sein darf. Das Problem hat keine Lösung.

Die Lösung als Beantwortung der Fragestellung wäre also:
Keine Nation kann eine Lösung liefern.

Aufgabe 4 (Die abergläubische Hexe aus dem bergischen Land)

Hierbei handelt es sich um unsere sog. Scherzaufgabe. Es gibt keine eindeutige Lösung. Die Bewertung erfolgt nach Kreativität im Lösungsansatz.
Eine mögliche Lösung könnte so aussehen:

Ich werde drei Tage vor dir sterben. Nun fürchtete die abergläubische Hexe selbst um ihr Leben und gab den Befehl, besonders gut für Lilo zu sorgen.