Digitaler Adventskalender 2006
www.mathekalender.de

Aufgaben

DFG-Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien

Inhaltsverzeichnis

1 Gibt es den Weihnachtsmann wirklich?

Autor: Matthias Ehrhardt

1.1 Aufgabe

Wie jedes Jahr fragen sich die wissbegierigen Kinder in einem bestimmten Alter, ob es den Weihnachtsmann denn wirklich gibt. Die meisten jungen Zweifler gibt es stets wegen diesem *Geschenke-Lieferungs-Problem* des Weihnachtsmannes. Schließlich gibt es ca. 2 Milliarden Kinder in der Welt, die alle zu Weihnachten auf ihre Geschenke warten. Angenommen pro Haushalt gibt es durchschnittlich 2,5 Kinder, so müsste der Weihnachtsmann ungefähr 800 Millionen Haushalte verteilt auf dem ganzen Globus besuchen.
Die zurückzulegende Distanz können die Kinder sehr leicht mit Hilfe der folgenden Überlegung grob abschätzen. Zunächst kennen sie aus der Schule den mittleren Erdradius als 6.371 km und bestimmen so die Oberfläche der Erdkugel. Weiterhin nehmen die Kinder an, dass nur ca. 30% dieser Fläche aus Land besteht. Der Einfachheit halber seien die Haushalte mit Kindern gleichmäßig auf dieser Landfläche verteilt. Die so erhaltene Teilfläche (vergleichen Sie es mal mit der Größe eines Fußballfelds!) gehört also zu einem einzelnen Haushalt und die Quadratwurzel davon ist demnach die mittlere Distanz zwischen den Haushalten. Endlich können die Kinder so die Gesamtdistanz, die der Weihnachtsmann zurücklegen muss, um alle Geschenke abzuliefern, leicht ausrechnen. Vergleichen Sie diese Distanz mit der Entfernung zwischen Erde und Sonne!
Nun rotiert (zum Glück) die Erde und der Weihnachtsmann hat somit mehr Zeit zum Ausliefern, als einige Kinder zunächst vermuten. Er beginnt an der internationalen Datumsgrenze und fährt mit seinem Schlitten von Ost nach West über verschiedene Zeitzonen hinweg. Dabei hat er nicht nur 10 Stunden (vom Schlafengehen um 20 Uhr abends bis zum Aufwachen der Kinder um 6 Uhr morgens) sondern zusätzliche 24 Stunden, also insgesamt 34 Stunden!
Dennoch ist das eine gewaltige Aufgabe selbst für den Weihnachtsmann und die Frage ist: Kann er es schaffen? Denn auch für den Weihnachtsmann gilt: nichts ist schneller als die Lichtgeschwindigkeit.

Bemerkung 1: Aufmerksame Kinder werden beim Vorüberfliegen des Weihnachtsschlittens erkennen, dass die Nase von Rudolph, dem Chef–Rentier, nicht mehr rot erscheint; diese Farbe ändert sich mit der Geschwindigkeit (Doppler–Effekt). Mit Hilfe der Tabelle unten können die Kinder somit die Geschwindigkeit abschätzen und Ihre Rechnung kontrollieren.

Farbe von Rudolphs Nase	rot	gelb	grün	blau	violett
Wellenlänge in Nanometer	650	580	550	480	400
Geschwindigkeit in Prozent der Lichtgeschwindigkeit	0	11	17	29	45

Bemerkung 2: Natürlich treten bei diesem Problem relativistische Effekte auf. So wird sich z.B. bei dieser hohen Geschwindigkeit die Masse, die Größe und das Altern des Weihnachtsmannes ändern. Eine Diskussion hierzu gehört aber eher in einen physikalischen Adventskalender.

Antwortmöglichkeiten:

1. Teilfläche eines Haushalts > Fußballfeld, Gesamtdistanz > Entfernung Erde–Sonne, Geschwindigkeit > Lichtgeschwindigkeit
2. Teilfläche eines Haushalts > Fußballfeld, Gesamtdistanz > Entfernung Erde–Sonne, Geschwindigkeit < Lichtgeschwindigkeit
3. Teilfläche eines Haushalts > Fußballfeld, Gesamtdistanz < Entfernung Erde–Sonne, Geschwindigkeit > Lichtgeschwindigkeit
4. Teilfläche eines Haushalts > Fußballfeld, Gesamtdistanz < Entfernung Erde–Sonne, Geschwindigkeit < Lichtgeschwindigkeit
5. Teilfläche eines Haushalts < Fußballfeld, Gesamtdistanz > Entfernung Erde–Sonne, Geschwindigkeit > Lichtgeschwindigkeit
6. Teilfläche eines Haushalts < Fußballfeld, Gesamtdistanz > Entfernung Erde–Sonne, Geschwindigkeit < Lichtgeschwindigkeit
7. Teilfläche eines Haushalts < Fußballfeld, Gesamtdistanz < Entfernung Erde–Sonne, Geschwindigkeit > Lichtgeschwindigkeit
8. Teilfläche eines Haushalts < Fußballfeld, Gesamtdistanz < Entfernung Erde–Sonne, Geschwindigkeit < Lichtgeschwindigkeit

2 Der Oktaederwiderstand

Autorinnen: Simone Bächle, Anita Liebenau
Projekt: D2

2.1 Aufgabe

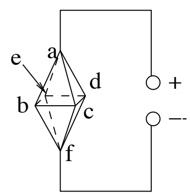


Abbildung 1: Schaltkreis

Im abgebildeten Schaltkreis ist ein Oktaeder als Widerstand eingebaut worden, dessen Kanten alle den Widerstand $R_i = 1\Omega$ haben. Nun möchte man das Oktaeder durch einen einfachen Widerstand ersetzen: Wie groß muss

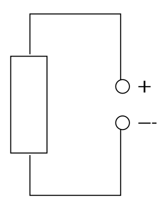


Abbildung 2: Schaltkreis mit neuem Widerstand

man den neuen Widerstand wählen, damit er dem des Oktaeders entspricht?

Antwortmöglichkeiten:

1. Einen Widerstand der Größe 1.
2. Einen Widerstand der Größe $\frac{1}{4}$.

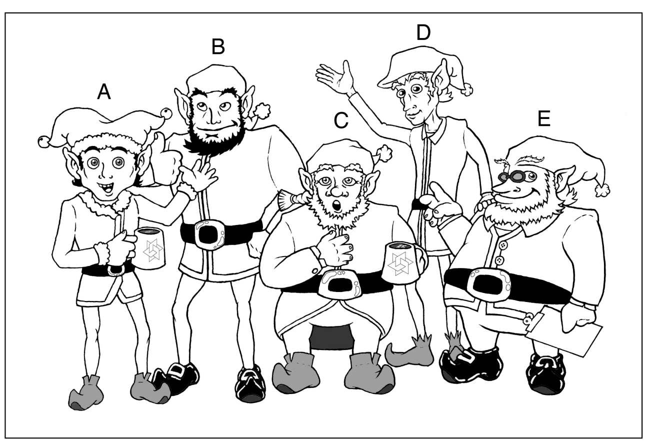
3. Einen Widerstand der Größe 4.
4. Einen Widerstand der Größe 12.
5. Einen Widerstand der Größe 6.
6. Einen Widerstand der Größe $\frac{1}{12}$.
7. Einen Widerstand der Größe $\frac{1}{2}$.
8. Einen Widerstand der Größe 8.
9. Einen Widerstand der Größe 24.
10. Einen Widerstand der Größe $\frac{1}{3}$.

3 Der Elfenkalender

Autorin: Katja Biermann

3.1 Aufgabe

Die Elfen sind ein fleißiges Volk, jedes Jahr helfen sie dem Weihnachtsmann, damit die Menschen rechtzeitig zu Weihnachten ihre Geschenke bekommen. Dabei brauchen sie viel Mathematik. Sie müssen ausrechnen, wieviel Geschenkpapier sie für ein Geschenk brauchen und wieviele unterschiedliche Farben sie an Geschenkpapier brauchen, damit kein Kind Geschenke mit einer gleichfarbigen Verpackung bekommt. Am schwierigsten ist es jedoch, den Austeilungsplan für den Weihnachtsmann zu erstellen, damit am Heilig Abend alle Kinder beschenkt werden können.
Damit der Elfennachwuchs möglichst früh mit den schweren Aufgaben vertraut gemacht wird, haben die Elfen einfach den Mathekalender des MATHEON kopiert. So brachten sie den kleinen Elfen spielerisch alle nötigen Grundlagen der Mathematik bei. Die kleinen Elfen lösten ganz fleißig alle Aufgaben, aber auch viele Erwachsene hatten ihren Spaß.
Im August dieses Jahres gab es die feierliche Preisverleihung. (Anmerkung: Wie jeder weiß, feiern Weihnachtselfen Weihnachten am 24.07., da sie ja am 24.12. keine Zeit haben.) Auf der Preisverleihung trafen sich auch alle Elfen, die Aufgaben für den Elfenkalender erstellt haben. Von 5 gibt es sogar folgendes Bild:

LINKS  RECHTS

Diese Fünf erzählten den ganzen Abend über den Elfenkalender und ihre Aufgaben. Der Elfenreporter Luigi war die ganze Zeit dabei und hat sich fleißig Notizen gemacht. Doch am Abend konnte er nur noch einige seiner Stichpunkte entziffern.

I. Till, der direkt links neben dem Elf der Aufgabe „Pythagoras im Wald" zu sehen ist, hat nicht den Kennbuchstaben A.

II. Die Aufgabe des Elfen auf Platz C des Bildes erschien 13 Tage später als „Vom Mäusezählen" und früher als die Aufgabe von Hugo.

III. Die Aufgabe des Elfen auf Platz A erschien später als die Aufgabe des Elfen von Platz B.

IV. Zwischen Emil und dem Elf mit der Aufgabe vom 24.07. steht höchstens ein anderer Elf auf dem Bild.

V. Weder Hugo noch der Elf mit der 15. Aufgabe stehen auf dem Bild ganz außen.

VI. „Fraktale Geometrie im Blattwerk" erschien später als die Aufgabe von Malte.

VII. Arnolds Aufgabe erschien früher als „Kürzeste Wege im Unterholz", dessen Aufgabensteller direkt rechts von Arnold steht, aber nicht auf Platz D.

VIII. Aufgabensteller: Arnold, Emil, Hugo, Malte, Till

IX. Türchen: 1, 2, 6, 15, 24

X. Aufgabentitel: „Kürzeste Wege im Unterholz", „Pythagoras im Wald", „Vom Mäusezählen", „Fraktale Geometrie im Blattwerk", „Elchsteuerung"

Kann er trotzdem noch rekonstruieren, welcher Elf wo auf dem Bild steht, welche Aufgabe er erstellt hat und hinter welchem Türchen diese war? Luigi hat es geschafft! Welche der folgenden Aussagen kann Luigi nun als falsch erkennen?

Antwortmöglichkeiten:

1. Auf Platz C steht nicht Malte.
2. Arnold ist nicht außen auf dem Bild zu sehen.
3. Emil hat eine Aufgabe vor dem 15.07. erstellt.
4. „Die Elchsteuerung“ ist nicht von Hugo.
5. Till steht in der Mitte des Bildes.
6. Emil steht nicht ganz links.
7. „Vom Mäusezählen“ ist die Aufgabe von Arnold.
8. „Kürzeste Wege im Unterholz“ ist von Till.
9. Malte hat nicht Aufgabe Nummer 6.
10. Hugo hat Aufgabe 24 erstellt.

4 Heiße Kufe

Autoren: Sören Bartels und Rüdiger Müller
Projekt: C 16

4.1 Aufgabe

Auf seiner langen Reise am Heiligabend gönnt sich der Weihnachtsmann eine kleine Pause an einem zugefrorenen See. Dabei passiert ihm ein Missgeschick und er verschüttet seinen heißen Weihnachtspunsch über eine der Kufen seines Schlittens. Aus Sicherheitsgründen darf er den See mit seinem Schlitten nur überqueren, wenn die Temperatur der jeweils 10m langen Kufen an keiner Stelle größer als 17.5℃ ist. Zu den Zeitpunkten $t_n = n \cdot \Delta t$ in Minuten ($n = 0, 1, 2, ...$) sei die Temperatur in Grad Celsius der mit Punsch erwärmten Kufe am Ort $x_j = j \cdot \Delta x$ in Metern ($j = 0, 1, 2, ..., 10$) durch die Größe T_j^n beschrieben. Aus der Anfangstemperatur T_j^0 läßt sich die Wärmeausbreitung in der Kufe (die hier als dünner Metallstab angenommen sei) - in einfacher Approximation - durch die Formel

$$T_j^{n+1} = s \cdot (T_{j+1}^n + T_{j-1}^n) + (1 - 2s) \cdot T_j^n$$

bestimmen, wobei $s = \Delta t/\Delta x^2$ ist.
Wie lange muss der Weihnachtsmann warten, bis er seine Reise über den See fortsetzen darf, wenn die Anfangstemperatur T_j^0 gegeben ist durch $T_5^0 = 64$ und $T_j^0 = 0$ für $j \neq 5$ und er die obige Rekursionsformel mit $\Delta t = 1/4$ und $\Delta x = 1$ verwendet? Wie groß ist die Temperatur am Ort $x = 2$ zum Zeitpunkt der frühesten Weiterfahrt?

Bemerkung:
Auch wenn mit dieser Formel die Temperatur nicht an allen Kufenstücken zu jeder Zeit berechnet werden kann, ist es doch eine gute Näherung für die Temperatur in der Kufe und reicht dem Weihnachtsmann zur Entscheidung aus.

Antwortmöglichkeiten:
Der Zeitpunkt t_W der Weiterfahrt und die Temperatur T_W am Ort $x = 2$ zum Zeitpunkt t_W sind:

1. $t_W = 1/4$, $T_W = 16$
2. $t_W = 1/4$, $T_W = 6$
3. $t_W = 1/2$, $T_W = 15$
4. $t_W = 1/2$, $T_W = 4$
5. $t_W = 3/4$, $T_W = 0$
6. $t_W = 3/4$, $T_W = 1$
7. $t_W = 1$, $T_W = 2$
8. $t_W = 1$, $T_W = 0$
9. $t_W = 5/4$, $T_W = 17,5$
10. $t_W = 5/4$, $T_W = 14$

Projektbezug:
Die Entwicklung und Analyse einfacher Verfahren zur Beschreibung praxisrelevanter physikalischer Vorgänge ist eine wichtige Aufgabe der numerischen

Mathematik. Insbesondere ist die zuverlässige und effiziente Vorhersage der Temperaturausbreitung beispielsweise in Halbleitern von entscheidender Bedeutung für deren Lebensdauer.

5 Langsam rieselt der Schnee

Autoren: Henseler, Reiner; Kimmerle, Sven-Joachim
Projekt: C14

5.1 Aufgabe

Wir betrachten eine Schneeflocke auf ihrem Weg (aus genügend großer Höhe) zur Erde.

Wir fragen uns nun: Mit welcher Geschwindigkeit kann die Schneeflocke maximal zur Erde fallen?
In unserem Modell wollen wir berücksichtigen, dass die Schneeflocke der Gravitation unterworfen ist sowie Luftwiderstand und Auftrieb nicht vernachlässigt werden können.
Dies führt zu folgender Differentialgleichung für die Geschwindigkeit v der Schneeflocke:

$$\frac{d}{dt}v(t) = -bv^2(t) - lv(t) + g,$$

wobei g die gegebene Fallbeschleunigung auf der Erde, l und b strikt positive Reibungskonstanten seien.
Zur Bestimmung der maximal möglichen Geschwindigkeit $v_\infty \in [0, \infty)$ betrachten wir folgenden Iterationsansatz: Wir starten mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v^0 = v(t = 0) = 0$ zur Zeit $t = 0$ und berechnen die Geschwindigkeit v_{n+1} nach $n + 1$ Zeitintervallen der Länge Δt nach folgender

Iteration:

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= -(\Delta t)bv_n^2 + (1-(\Delta t)l)v_n + (\Delta t)g \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0, &(1)\\
v_0 &= v^0. &(2)
\end{aligned}
$$

Diese Iterationsvorschrift ist z.B. für $\Delta t \in (0, \frac{-l+2\sqrt{l^2+3bg}}{l^2+4bg}]$ und Startwerte $v^0 \in [0, \frac{1-(\Delta t)l)}{(\Delta t)b}]$ sinnvoll.
Welcher Wert ergibt sich durch die in (**??**) und (**??**) gegebene Iterationsvorschrift für v_∞?
Hinweis: Man suche Fixpunkte obiger Iteration. Dabei braucht man keine Annahmen über Δt auszunutzen.

Antwortmöglichkeiten:

1. $v_\infty = \frac{l}{2b}$
2. $v_n \to +\infty$ falls $n \to \infty$
3. wenn M die Masse der Schneeflocke ist, dann gilt: $v_\infty = \frac{1}{2}Mg^2$
4. $v_\infty = \frac{g}{l}$
5. $v_\infty = -\frac{l}{2b} - \sqrt{\frac{l^2}{4b^2} + \frac{g}{b}}$
6. das hängt von der Fallhöhe h ab: $v_\infty = \sqrt{2gh}$
7. $v_\infty = \frac{l}{2b}(\sqrt{1+\frac{4gb}{l^2}} - 1)$
8. $v_\infty = -\frac{l}{2b} + \sqrt{\frac{l^2+4g}{4b^2}}$
9. $v_\infty = 0$
10. $v_\infty = \arctan(-2\pi bg)$

Projektbezug:
Das Aufstellen geeigneter Iterationsschemata und die Bestimmung ihrer Fixpunkte ist ein essentielles Werkzeug der modernen Angewandten Analysis. Im Projekt C14 des DFG Forschungszentrums Matheon werden unter anderem derartige Methoden zur Lösung Partieller Differentialgleichungen angewendet, die dort aus der Modellierung der Tropfenbildung in halbleitenden Kristallen hervorgehen.

6 Der Terminplan des Weihnachtsmanns

Autor: Sebastian Stiller
Projekt: B15

6.1 Aufgabe

Wie kann der Weihnachtsmann in einer einzigen Nacht alle Kinder beschenken? Manche behaupten, dies sei dadurch zu erklären, dass in Wahrheit die Eltern die Geschenke unter den Weihnachtsbaum legen. Dergleichen wollen wir natürlich nicht behaupten. Aber wir haben Grund zu der Annahme, dass der Weihnachtsmann nach einem perfekten Terminplan vorgeht. Dieser Plan und seine Ausführung müssen folgenden Vorgaben genügen:

1. Damit er durch den Kamin hereinkommen kann, muss das Feuer rechtzeitig gelöscht werden. Das lässt sich einrichten, allerdings nur, wenn der Weihnachtmann keinesfalls früher in den Kamin steigt als angekündigt - sonst verbrennt er sich die Hose.

2. Der Besuch beim ersten Kind kann nicht früher als E Uhr und der beim letzten nicht später als L Uhr eingeplant werden. Wenn es am Ende doch später wird, ist das nicht schön, aber möglich (dazu kommen wir noch). Wenn ein Besuch hingegen von vornherein schon später als L Uhr eingeplant würde, hagelte es Beschwerden von Seiten der Eltern.

3. Für jeden Besuch eines Kindes nimmt sich der Weihnachtsmann T Minuten Zeit. Der Rentierschlitten ist so ungeheuer schnell, dass man die Zeit zwischen den Besuchen vernachlässigen kann.

Soweit ist das alles noch ganz einfach zu planen, aber ...

4. ...selten, sehr selten, im Schnitt bei allenfalls einem von 500 Kindern kommt es vor, dass sich die Sache schwieriger gestaltet und der Besuch t Minuten länger dauert. Die Weihnachtsmänner haben schon alles versucht, aber diese Fälle lassen sich einfach nicht genauer vorhersagen.

Die vierte Vorgabe erklärt, weshalb sich der Weihnachtsmann manchmal trotz seiner Planung verspätet: Es ist einfach nicht genug Zeitzwischen E Uhr und L Uhr, um für alle Kinder $T + t$ Minuten einzuplanen. Dennoch ist der Terminplan im Sinne der folgenden Vorgabe *perfekt*:

5. Im Erwartungswert soll die Summe der Wartezeiten aller Kinder minimal sein. Dabei zählt jede Minute, die ein Kind auf den Weihnachtsmann länger als vereinbart warten muss. Insbesondere macht es keinen Unterschied, ob ein Kind bis nach L Uhr warten muss oder ein anderes Kind vor L Uhr genauso lange wartet.

Eure Aufgabe ist es nun, einen solchen Terminplan für einen sehr einfachen Fall zu erstellen. Nehmen wir an, der Weihnachtsmann möchte zehn Kinder besuchen. Die Zeiten t und T seien beide 30 (Minuten), E gleich 3 (Uhr nachmittags) und L gleich 8 (Uhr abends). Die Wahrscheinlichkeit, dass der Besuch beim i-ten Kind 60 statt 30 Minuten dauert, ist unabhängig voneinander für alle i gleich $\frac{1}{500}$. Mit $A_i, 0 < i < 11$, bezeichnen wir die verabredete Ankunft beim i-ten Kind. Denkt daran, dass sich ein Weihnachtsmann niemals früher als verabredet in einen Kamin schwingt.

Hier noch ein Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit für einen 60- minütigen Besuch ist sehr gering. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei oder mehr der 10 Besuche jeweils 60 Minuten dauern, ist sogar supergering! Sie ist so klein, dass man sich für die Bestimmung der optimalen Lösung nicht um die Fälle kümmern muss, in denen mehr als ein Besuch 60 Minuten dauert. Man kann exakt beweisen, dass diese Fälle so unwahrscheinlich sind, dass sie die Lösung nicht beeinflussen können. Ihr dürft dies ohne Beweis annehmen.

Welcher Plan ist perfekt und wird vom Weihnachtsmann ausgeben?

Antwortmöglichkeiten:

Plan	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
1	3:00	3:30	4:00	4:30	5:00	5:30	6:00	6:30	7:00	8:00
2	3:00	3:30	4:00	4:30	5:00	5:30	6:00	7:00	7:30	8:00
3	3:00	3:30	4:00	4:30	5:00	6:00	6:30	7:00	7:30	8:00
4	3:00	3:30	4:00	4:30	5:30	6:00	6:30	7:00	7:30	8:00
5	3:00	3:30	4:30	5:00	5:30	6:00	6:30	7:00	7:30	8:00
6	3:00	4:00	4:30	5:00	5:30	6:00	6:30	7:00	7:30	8:00
7	Keiner der angegebenen Pläne ist perfekt.									
8	3:00	3:30	4:05	4:40	5:15	5:50	6:25	7:00	7:30	8:00
9	3:00	3:35	4:05	4:40	5:10	5:45	6:15	6:50	7:20	7:55
10	3:00	3:30	4:10	4:40	5:10	5:50	6:20	6:50	7:30	8:00

Projektbezug:
Übrigens, wir wissen aus sicherer Quelle, dass sich auch schon Verkehrsunternehmen für die Planungskunst der Weihnachtsmänner interessieren. Auch bei Bussen und Bahnen zählt jede Verspätungsminute, und natürlich soll kein Zug früher abfahren als angegeben. Ihr könnt Euch sicher vorstellen, dass dies noch deutlich schwieriger ist, wenn man ein ganzes Netz von Fahrten planen muss. Deshalb hat die Planungsabteilung der Weihnachtsmänner die Verkehrsbetriebe an die MATHEON-Forscher verwiesen.

7 Identifizierung unartiger Kinder

Autoren: Stefan Hougardy, Stefan Kirchner, Mariano Zelke
Projekt: A5

7.1 Aufgabe

Wie jedes Jahr kurz vor Weihnachten ist der Weihnachtsmann wieder mal im Stress, da die Geschenke rechtzeitig verteilt werden müssen. Vor sich hat er einen großen Sack mit Geschenken für die Lange Straße. Die Hausnummern der Langen Straße sind aufsteigend mit 1,2,3,4,... nummeriert. Auf jedem Geschenk im Sack steht die Hausnummer geschrieben, damit der Weihnachtsmann weiß, wo er das Geschenk abzuliefern hat. Die Menge der Hausnummern auf den Geschenken im Sack bezeichnet der Weihnachtsmann als Menge S.

Für zwei Häuser hat er kein Geschenk, die Kinder dort waren im vergangenen Jahr nicht hinreichend artig. Für die restlichen Häuser ist jeweils genau ein Geschenk im Sack.

Verständlicherweise ist Knecht Ruprecht brennend an den beiden Häusern mit den unartigen Kindern interessiert, darf er doch dort seine Ruten verteilen. Er drängt den Weihnachtsmann dazu, die beiden fraglichen Hausnummern herauszufinden. Dieser will gerne helfen, ist aber, wie gesagt, in Eile. Daher hat er nur die Zeit, jede Hausnummer auf den Geschenken genau einmal zu lesen. Erschwerend kommt hinzu, dass er ein miserables Gedächtnis hat, welches ihm nur gestattet, sich maximal vier Zahlen zu merken. Andererseits ist er aber ein hervorragender Kopfrechner, da er seit seiner Kindheit zum einen sehr viel rechnen musste und es zum anderen noch keine Taschenrechner gab.

Es ist ihm klar, dass er die Anzahl der Pakete zählen muss. Mit welcher zusätzlichen Strategie kann der Weihnachtsmann die beiden Hausnummern, in denen die unartigen Kinder wohnen, zuverlässig rekonstruieren?

Antwortmöglichkeiten:

1. Das lässt sich nur beantworten, wenn im Voraus bekannt ist, wie viele Hausnummern die Straße hat.

2. Er multipliziert die Hausnummern, die auf den Paketen stehen.
3. Für jede Hausnummer i, die im Sack vorkommt, berechnet er die i-te Primzahl und summiert diese.
4. Er summiert die Kubikzahlen der Hausnummern, die auf den Paketen stehen.
5. Er berechnet die beiden Zahlen $\sum_{i\in S} i$ und $\sum_{i\in S} T(i)$. Dabei ist $T(i)$ die kleinste Primzahl, die i teilt. ($T(1)$ sei 1.)
6. Er summiert zum einen die Hausnummern und bildet zusätzlich die Summe der Quadrate der Hausnummern, die auf den Paketen stehen.
7. Er berechnet $\sum_{k=1}^{|S|} k\cdot\sigma(k)$, wobei $\sigma(k)$ die Hausnummer auf dem k-ten Paket ist, das er aus dem Sack zieht. ($|S|$ ist die Anzahl der Elemente der Menge S.)
8. Er summiert alle Hausnummern auf und sucht zusätzlich die größte und zweitgrößte Hausnummer heraus.
9. Für jede Hausnummer i berechnet er 2^i, falls i gerade und 3^i, falls i ungerade ist und multipliziert diese Zahlen auf.
10. Der Weihnachtsmann kann Knecht Ruprecht nicht helfen.

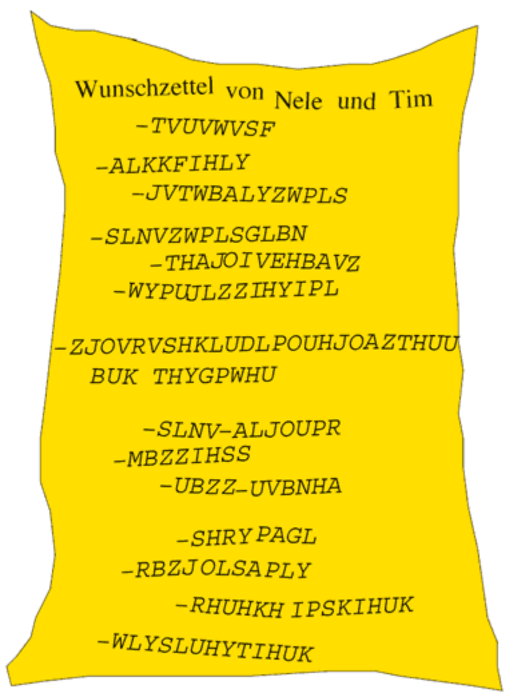
Projektbezug:
Die Aufgabe stammt aus dem Bereich der Datenstrom-Algorithmen. Charakteristisch für diese Algorithmen ist, dass die Eingabe zu groß ist, um sie komplett im Arbeitsspeicher des Computers zu halten. Beispiele für solche Eingaben sind große Netzwerke, wie sie in unserem Projekt vorkommen.

8 Wunschzettel von Nele und Tim

Autorin: Anita Liebenau

8.1 Aufgabe

Des Weihnachtsmanns Helferselfen stöbern in der Vorweihnachtszeit in jedem Kinderzimmer, in jeder Ecke und in jeder Schublade, um alle Wunschzettel zu finden und jeden Wunsch erfüllen zu können. Bei Nele und Tim findet ein kleiner Elf aber nur diesen Wunschzettel mit einem Buchstabendurcheinander:



Er wundert sich, denn eigentlich können Nele und Tim schon lesen und schreiben. Eine Notiz liegt daneben auf dem Schreibtisch:

Aber ob die was zu bedeuten hat? Vielleicht könnt ihr ja dem kleinen Weihnachtself helfen.

Zu welcher Gruppe von Geschenken gehört der an der letzten Stelle auf dem Wunschzettel stehende Wunsch?

Antwortmöglichkeiten:

1. Schokoladen
2. Spielzeuge
3. Schmuck
4. Bastelkästen
5. Schminke
6. PC-Zubehör
7. Kuscheltiere
8. Sportgeräte (Bälle o.Ä.)
9. Weihnachtsgebäck
10. Haustiere

9 Bruchpilot Rudi

Autorin: Peggy Daume
Projekt: Z 1.1

9.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat in seinem Rentierstall ein besonders tollpatschiges Rentier – Rudi. Rudi ist ein wahrer Bruchpilot. Besonders bei den Schlittenlandungen auf den Dächern der zu Beschenkenden leiden der Weihnachtsmann und die vielen schönen Geschenke. Dennoch hat der Weihnachtsmann bekanntermaßen ein gutes Herz und wird Rentier Rudi auch in diesem Jahr wieder vor seinen Schlitten spannen. Doch der Weihnachtsmann hat aus den Erfahrungen der letzten Jahre gelernt. Er möchte in jedem Fall enttäuschte Gesichter vermeiden.

Aus diesem Grund denkt er über die Möglichkeit nach, in diesem Jahr erstmalig eine spezielle Geschenke-Bruch-Versicherung für besonders wertvolle Geschenke abzuschließen. Dafür hat er folgenden Einfall: Geht ein Geschenk entzwei, stellt der Weihnachtsmann sofort einen Gutschein aus und verschenkt diesen. Als kleines „Schmerzensgeld" soll der Gutschein mit einer Summe, die 10% über dem ursprünglichen Wert des Geschenks liegt, versehen werden. Das auf dem Gutschein stehende Geld möchte der Weihnachtsmann im Schadensfall von der Versicherung ausbezahlt bekommen. Mit dieser Idee wendet er sich an das Versicherungsunternehmen „FröhWeih". Das Risiko, das die Versicherung durch die Geschenke-Bruch-Versicherung eingeht, lässt sich die Versicherung natürlich mit einem Beitrag, der so genannnten Versicherungsprämie, bezahlen. Doch wie berechnet die Versicherung die Versicherungsprämie? Der Weihnachtsmann lässt sich dies erklären:

„Zur Berechnung der Versicherungsprämie müssen wir alle möglichen Leistungen betrachten, die von uns und von Dir erbracht werden. Klar sollte zunächst sein, dass Du für die Geschenke-Bruch-Versicherung für jedes Geschenk einmalig eine Prämie zahlst. Die Prämie wird am 01. Dezember dieses Jahres fällig. Für unsere Leistungen hingegen gibt es zwei mögliche Szenarien:

- *Das Geschenk geht bei keiner der Landungen kaputt. Dann erbringen wir keine Leistung.*

- *Das Geschenk geht bei einer der Landungen kaputt. Dann zahlen wir am 01. Januar des nächsten Jahres die Versicherungssumme.*

Unsere Leistungen sind also vom zufälligen Zerbrechen der Geschenke abhängig. Wir halten es daher für fair, wenn Du als Versicherungsprämie gerade so viel bezahlst, wie wir an Leistung durchschnittlich zahlen. Das bedeutet: Ist X die Versicherungssumme (= Betrag, den Du nach Eintreten des Schadensfalls ausbezahlt bekommst), dann berechnen wir die Versicherungsprämie P mit der folgenden Formel

$$P = p_1 \cdot X + p_2 \cdot X + \ldots + p_n \cdot X.$$

Dabei ist p_1 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Geschenk bei der ersten Landung zerbricht, p_2 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Geschenk bei der zweiten Landung zerbricht, sofern es nicht schon bei der ersten Landung zerbrach usw. Dahinter steckt die Erwartung, dass wir eine Unmenge von Versicherungen dieser Art verkaufen und sich die Schadensfälle mit den Nichtschadensfälle ausgleichen, so dass wir im Durchschnitt weder Verlust noch einen Gewinn machen. Um aber die durchschnittliche Leistung berechnen zu können, brauchen wir Aussagen darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Geschenk zerbricht. Ohne diese können wir leider keine Versicherung abschließen.

Glücklicherweise hat der Weihachtsmann in den letzten Jahren genauestens darüber Buch geführt, wie viele Geschenke bei einer bestimmten Landung kaputt gegangen sind. So sind z. B. bei der ersten Landung insgesamt 0,33% aller Geschenke kaputt gegangen. Von den ganz gebliebenen und bei der ersten Landung nicht verschenkten Geschenken haben bei der zweiten Landung 0,42% einen Defekt erlitten. Da der Weihnachtsmann bekanntermaßen sehr viele Geschenke verteilt, können die in der nachfolgenden Tabelle angegebenen relativen Häufigkeiten auch als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden. Der Weihnachtsmann kann der Versicherung also die notwendigen Daten zur Bestimmung der Versicherungsprämie liefern.

Landung	1	2	3	4	5
Relative Häufigkeit	0,0033	0,0042	0,0065	0,0119	0,0271

Der Weihnachtsmann denkt einen Moment über den Vorschlag der Versicherung nach. Eigentlich ist er mit dem Angebot zufrieden, allerdings ist er der Meinung, dass die Versicherung ein kleines Detail übersehen hat. Der Weihnachtsmann soll die Versicherungsprämie bereits am 01. Dezember zahlen, wird aber im Schadensfall erst einen Monat später am 01. Januar das Geld für die zerstörten Geschenke erhalten. Er denkt, dass dies unfair ist, da die Versicherung noch einen Monat lang Zinsen erhält (Jahreszinssatz 3% bei monatlicher Verzinsung mit Zinseszins und linearer Verzinsung, d. h. bei Jahreszinssatz von $i\%$ beträgt Monatszinssatz $\frac{i}{12}\%$) und erst dann die Versicherungssumme zahlen muss. Diesen Vorteil auf Seiten der Versicherung möchte der Weihnachtsmann bei der Berechnung der Versicherungsprämie berücksichtigt wissen und schlägt daher vor, dass durch so genanntes Abzinsen auf den Zeitpunkt des Vertragsabschlusses die Leistungen der Versicherung und des Weihnachtsmannes vergleichbar gemacht werden.
Wie groß ist die Differenz (bzw. der Betrag der Differenz) zwischen den zwei vorgeschlagenen Versicherungsprämien, wenn der Weihnachtsmann ein Geschenk im Wert von €5.000,00 versichern möchte, das nach der vierten Landung verschenkt wird?
Antwortmöglichkeiten:

1. €0,71
2. €0,15
3. €0,36
4. €0,32
5. €4,15

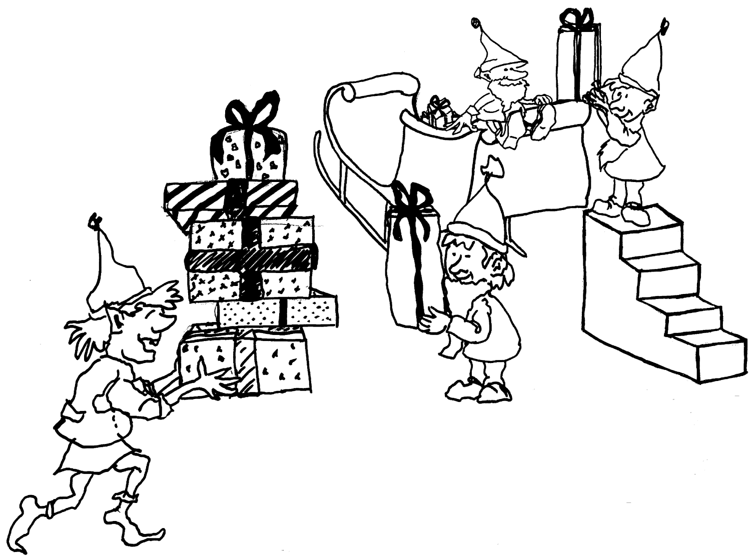
6. €0,73
7. €3,97
8. €4,27
9. €0,16
10. €1,96

Projektbezug:
Diese Aufgabe stammt aus dem Bereich der Versicherungsmathematik, die einen Teil der stochastischen Finanzmathematik ausmacht. So wie in dieser Aufgabe die Versicherungsprämie für eine Geschenke-Bruch-Versicherung bestimmt wird, werden in der Realität Prämien für Lebensversicherungen berechnet. Themen der stochastischen Finanzmathematik sind zum Teil sehr gut für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II geeignet. In dem MATHEON-Projekt G2 der ersten Förderperiode wurden drei Unterrichtseinheiten mit entsprechenden Materialien zur stochastischen Finanzmathematik entwickelt und erprobt.

10 Schlittenbeladung einmal anders

Autoren: Falk Ebert, Anita Liebenau
Projekt: D13

10.1 Aufgabe



Alle Geschenke sind verpackt, die Rentiere gefüttert, des Weihnachtsmanns Schuhe geputzt. Nun müssen nur noch die Schlitten mit den Geschenken beladen werden. 8 Schlitten gilt es mit Spielzeugautos, Bällen, Puppen, Schokolade, Lakritze und Kuscheltieren zu beladen. Die folgende Tabelle gibt die gewünschte Bepackung der 8 Schlitten an:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
Auto	5	4	2	4	2	5	2	5
Ball	2	4	2	4	8	2	2	2
Puppe	4	5	3	4	4	4	1	4
Schokolade	5	4	2	4	2	5	2	5
Lakritze	5	4	2	3	2	5	2	6
Kuscheltier	3	4	2	4	6	3	2	3

D.h., auf Schlitten 1 sollen fünf Autos, zwei Bälle, vier Puppen, fünfmal

Schokolade, fünfmal Lakritze und drei Kuscheltiere liegen.
Nun gibt es beliebig viele Wichtel, die diese Schlitten bepacken können. Allerdings sind in diesem Jahr viele neue Geschenke zu bauen, für die man gern einige der Wichtel abziehen möchte. Weiterhin wird für die Wichtel ein Arbeitsplan festgelegt.

- Ein Wichtel bewegt sich immer von *einem* Schlitten ins Geschenkelager oder vom Lager zu *einem* Schlitten.
- Das Lager hat mehr als genug Geschenke jeden Typs vorrätig.
- Ein Wichtel kann beliebig oft hin und her laufen und beschwert sich niemals darüber.
- Die Reihenfolge, in der die Wichtel an den Schlitten ankommen, ist prinzipiell egal.
- Jeder Wichtel kennt nur ein bestimmtes Muster, Geschenke zu transportieren: Ein Wichtel geht stets vom Lager zum Schlitten und zurück oder vom Schlitten zum Lager und dann zurück zum Schlitten. Dabei nimmt er eine feste Anzahl jedes Geschenktyps von seinem Startpunkt mit und deponiert sie am Ziel und eine feste Anzahl jedes Geschenktyps von seinem Zielpunkt wieder zum Startpunkt zurück. Alle Anzahlen können auch null sein.
- Ein Wichtel ist auch nur ein Mensch und kann von jedem Typ nicht mehr als zwei Geschenke tragen.

Beispiel
Wichtel Arvin trägt stets zwei (Spielzeug-)Autos und eine Puppe, sonst nichts. Egal wie oft er vom Lager zu einem Schlitten läuft, auf diesem Schlitten sind dann stets doppelt so viele Autos wie Puppen. Wenn man eine gleiche Anzahl dieser beiden Geschenke auf einem Schlitten benötigt, reicht Arvin also nicht aus. Kommt jetzt Wichtel Berit dazu, kann diese den Schlitten eventuell korrigieren. Berit trägt stets ein Auto hin und eine Puppe zurück, egal von wo nach wo. Wenn jetzt auf einem Schlitten drei Autos und drei Puppen liegen sollen, so reicht es, Arvin zweimal vom Lager zum Schlitten laufen zu lassen (vier Autos, zwei Puppen) und Berit einmal vom Schlitten zum Lager. Berit nimmt vom Schlitten ein Auto weg, schafft es ins Lager und holt von dort eine Puppe und legt sie auf den Schlitten. Mit diesen beiden

Wichteln kann man den Schlitten also korrekt beladen, mit nur einem der beiden nicht.
Diese beiden können auch beim Beladen der anderen Schlitten helfen, eventuell braucht man aber noch mehr Wichtel, um alle Schlitten korrekt beladen zu können. Je weniger man braucht, desto besser.

Aufgabe

I Man möchte so wenig wie möglich Wichtel einsetzen. Wie viele Wichtel benötigt man mindestens, um die 8 Schlitten korrekt zu bepacken?

II Lässt man bei der Gesamtbeladung kleine Abweichungen zu (d.h. auf jedem Schlitten darf genau ein Geschenk zu wenig oder zu viel sein), wie viele Wichtel benötigt man dann für die Beladung mindestens?

Antwortmöglichkeiten:

1. korrekt 5, mit Abweichung 3
2. korrekt 7, mit Abweichung 6
3. korrekt 4, mit Abweichung 3
4. korrekt 6, mit Abweichung 7
5. korrekt 4, mit Abweichung 4
6. korrekt 5, mit Abweichung 4
7. korrekt 5, mit Abweichung 2
8. korrekt 6, mit Abweichung 3
9. korrekt 4, mit Abweichung 2
10. korrekt 6, mit Abweichung 4

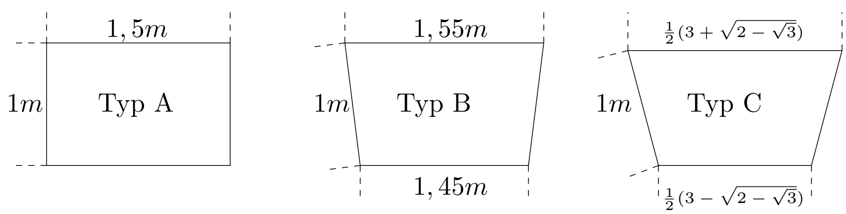
Projektbezug:
Die Aufgabe hat ihren mathematischen Hintergrund in einer Problemstellung, die sich *Modellreduktion* nennt. Dabei geht es darum große mathematische Probleme so umzuformulieren, dass sie mit möglichst wenig Unbekannten auskommen. Das hat den Vorteil, dass diese Aufgaben für einen Computer schneller lösbar sind und auch noch weniger Speicherplatz verbrauchen. Unter Umständen nimmt man für so einen Gewinn an Geschwindigkeit beim Lösen der Aufgaben auch kleine Fehler in Kauf - allerdings nur, solange man weiß, wie groß die Fehler maximal werden können. Modellreduktion wird in der Projektgruppe D13 zum Beispiel für Gleichungen aus der Schaltkreissimulation untersucht.

11 Ausstellung der Weihnachtsbären

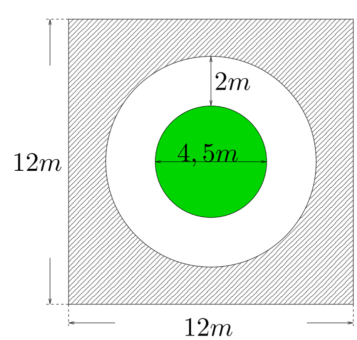
Autor: Thilo Rörig

11.1 Aufgabe

Für eine Ausstellung sollen in der Adventszeit 24 Weihnachts-Buddybären in einem Raum aufgestellt werden. Die Bären sind auf drei verschiedene Bodenplatten der folgenden Formate montiert:



Der Raum ist $12m \times 12m$ groß. In der Mitte des Raumes befindet sich ein riesiger Weihnachtsbaum mit $4,5m$ Durchmesser. Damit man sich sowohl den Weihnachtsbaum, als auch die Bären gemütlich anschauen kann, soll der Abstand zwischen dem Weihnachtsbaum und den Bodenplatten der Bären mindestens $2m$ betragen (siehe Skizze). Außerdem sollen die Platten Kante an Kante verlegt werden, d.h., die jeweils $1m$ langen Kanten der Bodenplatten werden so aneinander gelegt, dass die Bären einen geschlossenen „Kreis“ bilden. Auch die Bären sollen die Adventsstimmung genießen und in Richtung Weihnachtsbaum schauen, d.h., die schmalen Seiten der trapezförmigen Bodenplatten zeigen in Richtung Weihnachtsbaum.



Wie viele Bodenplatten von den jeweiligen Sorten benötigt man für die Aufstellung der Bären?
Antwortmöglichkeiten:

1. 8 Platten von Typ A, 8 Platten von Typ B, 8 Platten von Typ C
2. 0 Platten von Typ A, 12 Platten von Typ B, 12 Platten von Typ C
3. 0 Platten von Typ A, 24 Platten von Typ B, 0 Platten von Typ C
4. 20 Platten von Typ A, 0 Platten von Typ B, 4 Platten von Typ C
5. 12 Platten von Typ A, 6 Platten von Typ B, 6 Platten von Typ C
6. 4 Platten von Typ A, 10 Platten von Typ B, 10 Platten von Typ C
7. 12 Platten von Typ A, 0 Platten von Typ B, 12 Platten von Typ C
8. 8 Platten von Typ A, 4 Platten von Typ B, 12 Platten von Typ C
9. 6 Platten von Typ A, 6 Platten von Typ B, 12 Platten von Typ C
10. 16 Platten von Typ A, 0 Platten von Typ B, 8 Platten von Typ C

Projektbezug:
Bei der Aufgabe handelt es sich um eine Vereinfachung eines realen Problems, das es bei der Aufstellung der United Buddy Bears auf dem Wiener Karlsplatz gab.

12 Statistische Tests

Autor: Karsten Tabelow
Projekt: A3 „Image and Signal Processing in medicine and biosciences"

12.1 Aufgabe

Auch Wichtel, die fleißigen Helfer des Weihnachtsmannes, sind vernascht und so kam es, dass kurz vor dem Heiligen Abend 100 Schokoladenweihnachtsmänner fehlten, die doch eigentlich zum Verteilen an die Kinder gedacht waren. Traurig, aber wahr: Es musste herausgefunden werden, wer dem Duft der Schokolade nicht hatte widerstehen können. 100000 Wichtel waren verdächtigt, doch alle beteuerten ihre Unschuld! Es gab sogar einige Wichtel, die in den hinteren Reihen kicherten, passierte dies doch nicht zum ersten Mal! Doch Erfahrung macht ja bekanntlich klug, und so gab es in diesem Jahr einen komplizierten Test, mit dem herausgefunden werden konnte, ob ein Wichtel die Schokolade genommen hatte. Der Test besteht aus einer langen und komplizierten Prozedur aus Abkitzeln, Wiegen, und Ohrenlangziehen. Wie bei jedem Test, bei dem der Zufall eine Rolle spielt, gibt es eine positive Wahrscheinlichkeit a dafür, dass ein unschuldiger Wichtel für schuldig befunden wird. Dies sind sogenannte falsch positive Testergebnisse. Glücklicherweise kann durch intensiveres und vor allem längeres Kitzeln die Empfindlichkeit des Tests so eingestellt werden, dass ein beliebig kleiner Wert von a erreicht wird.
Wie groß muss a gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass bei den einhunderttausend gekitzelten Wichteln mindestens ein Test ein falsch positives Ergebnis liefert, nur 1% ist?
Hinweis: Es sollte gerundet werden!

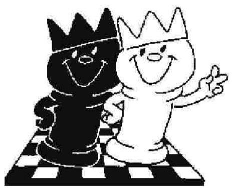
Antwortmöglichkeiten:

1. 0.01%
2. 99.5%
3. 0.0000007%

4. 1%
5. 0.56%
6. 0.00001%
7. 50%
8. 3.2%
9. 0.2%
10. 23.5%

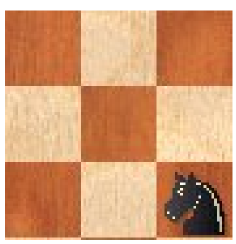
Projektbezug:
Vor solchen multiplen Testproblemen steht man in der funktionellen Magnetresonanztomographie, mit der untersucht wird, welche Bereiche des Gehirns für eine bestimmte kognitive Leistung verwendet werden. Dabei muss entschieden werden, ob ein bestimmes kleines Volumenelement des Gehirns (ein Voxel) während des Experiments aktiv wahr. Diese Entscheidung muss so empfindlich sein, dass im ganzen Gehirn nur ein festzulegender Anteil an falsch positiven Entscheidungen auftritt, weil sonst die Zahl der falsch positiven Voxel die Zahl der aktivierten bei weitem übersteigen kann.
Das Projekt A3 im Matheon beschäftigt sich mit Glättungsmethoden, mit denen diese Entscheidung noch wesentlich verbessert werden kann.

13 Nette Leute spielen Schach!



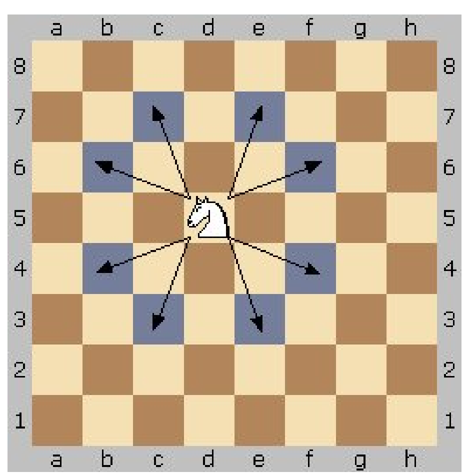
Autorin: Elena Virnik
Projekt: A9

13.1 Aufgabe



Wir haben ein vereinfachtes Schachbrett, siehe Abbildung links. Der Springer beginnt seine Tour in der rechten unteren Ecke. In jedem Zug springt er entweder auf eines der möglichen Felder oder er verbleibt da, wo er gerade ist. Welche der Antwortmöglichkeiten ist die beste Näherung (da gerundet) an die Wahrscheinlichkeit, dass der Springer sich nach 2006 Zügen wieder im Startfeld unten rechts befindet?

Kleine Erinnerung an die Schachregeln: der Springerzug geht so...



Antwortmöglichkeiten:

1. 11,11%
2. 16,67 %
3. 22,22%
4. 12,5%
5. 33,33%
6. 37,5%
7. 44,44%
8. 25%
9. 55,56%
10. 52,5%

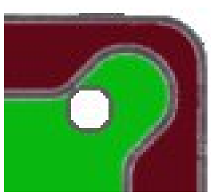
Projektbezug:
Während man diese Aufgabe auf einem 3x3 Schachbrett durch Nachdenken lösen kann, wird man beim 4x4 Fall, oder gar erst auf einem richtigen Schachbrett schnell merken, dass man ohne die Hilfe eines Computers nicht auskommt.
Die Übergangswahrscheinlichkeiten lassen sich als ein sogenannter endlicher homogener Markov-Prozess modellieren. Dies ist ein spezieller stochastischer Prozess mit der folgenden charakteristischen Eigenschaft: Es gibt n verschiedene Zustände. Der Übergang von einem Zustand in einen anderen hängt ausschließlich von der Übergangswahrscheinlichkeit ab und nicht von dem Zeitpunkt, zu dem der Übergang passiert. Schreibt man die Übergangswahrscheinlichkeiten in eine Matrix, so kann man den Vektor mit dem Ausgangszustand 2006 mal mit der Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten multiplizieren und erhält so die Lösung. Allerdings geht es auch einfacher!

14 Knecht Ruprechts Billardproblem

Autor: Martin Weiser
Projekt: A1

14.1 Aufgabe

Seit Knecht Ruprecht letztes Jahr zu Weihnachten einen perfekten Billardtisch geschenkt bekommen hat, auf dem die exakt runden Kugeln reibungsfrei und geradlinig rollen, vertreibt er sich das Warten auf die diesjährige Adventszeit damit, besonders schwierige Stöße zu üben. Auf der Diagonale des Tisches verteilt er gleichmäßig 3 Kugeln, so dass deren Mittelpunkte Abstände von 50cm haben. Mit einem gut gezielten Stoß des Queues auf die erste Kugel möchte er alle der Reihe nach anstoßen, so dass die dritte Kugel schließlich in die 1m entfernte Ecktasche rollt. Nun ist zwar der Billardtisch perfekt, Knecht Ruprecht aber nicht — er hält das Queue niemals perfekt entlang der Diagonale. Welche Winkelabweichung (in Grad) darf er sich höchstens erlauben, damit die letzte Kugel tatsächlich in die Tasche rollt?
Übrigens: Billardkugeln haben einen Durchmesser von 57,2mm, während die Ecktaschen eine Breite von 11cm aufweisen. Um tatsächlich in die Ecktasche zu gelangen, muss die Kugel in ihrer ganzen Breite hineinpassen (so wie im Bild) — Reflexionen an den Taschen-Eckpunkten führen nicht zum Erfolg.



Antwortmöglichkeiten:

1. 0.0003
2. 0.001
3. 0.003

4. 0.01
5. 0.03
6. 0.1
7. 0.3
8. 1
9. 3
10. 10

Projektbezug:
Die Fehlerfortpflanzung zu berücksichtigen ist bei allen numerischen Simulationen wichtig. So hat die Dynamik von Molekülbewegungen, wie sie am Matheon bearbeitet wird, durchaus Ähnlichkeit mit diesem Billardproblem.

15 Das morgendliche Brückenritual

Autor: Oliver Sander
Projekt: A2

15.1 Aufgabe

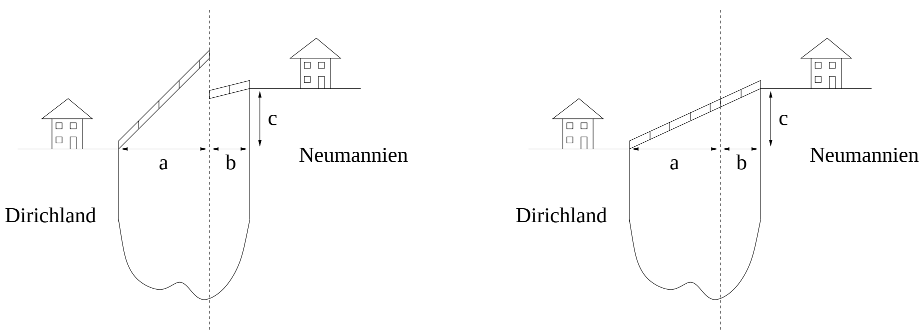


Abbildung 3: Links: Mögliche Ausgangssituation; rechts: Gesuchte Lösung

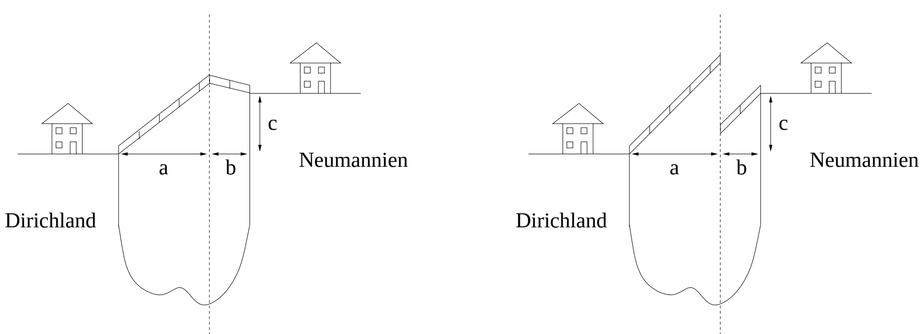


Abbildung 4: Links: Mögliche Brückenpositionen nach Schritt 2; rechts: Brücken nach Schritt 3

Die Staatsgrenze zwischen Dirichland und Neumannien liegt in einer tiefen Schlucht. Genaugenommen liegt sie a Meter von der dirichländischen Schluchtseite und b Meter von der neumannischen Schluchtseite weit weg. Die Schlucht ist also $a+b$ Meter breit. Obendrein ist die neumannische Seite c Meter höher als die dirichländische.

Die einzige Möglichkeit die Grenze zu überschreiten, bilden 2 Zugbrücken, eine dirichländische und eine neumannische. Diese sind nicht nur schwenkbar, sondern können auch in der Länge verstellt werden. Im Prinzip können sie beliebig lang werden. Aus politischen Gründen darf allerdings kein Land seine Brücke soweit verlängern, dass sie über die Staatsgrenze hinausragt. Deswegen ist Kooperation notwendig. Damit der Grenzübergang passierbar ist, müssen beide Zugbrücken so eingestellt werden, dass sie sich an der exakten Staatsgrenze treffen und eine gerade Linie bilden. Da die Brücken nachts hochgezogen werden, muss die richtige Position jeden Morgen neu eingestellt werden. Dazu bedient man sich eines jahrtausendealten, ehrwürdigen Rituals.

1. Die beiden Brücken werden in eine beliebige, nichtsenkrechte Position gezogen und so verlängert, dass sie bis zur Staatsgrenze reichen (wir gehen davon aus, dass weder die eine noch die andere Brücke zufällig sofort die korrekte Position einnimmt).

2. Die dirichländische Brücke wird so eingestellt, dass sie die neumannische an der Grenzlinie trifft.

3. Die neumannische Brücke wird so eingestellt, dass sie die gleiche Steigung hat wie die dirichländische und wird dann wieder bis zur Grenze verlängert.

4. Falls die zwei Brücken jetzt eine gerade Linie bilden, wird das Ritual abgebrochen.

5. Ansonsten zurück zu 2.

Funktioniert dieses Ritual überhaupt?

Antwortmöglichkeiten:

1. Ja, das Verfahren wird nach höchstens 96 Schritten mit der richtigen Lösung beendet.

2. Ja, das Verfahren wird nach mindestens 96 Schritten mit der richtigen Lösung beendet.

3. Das Verfahren wird nie beendet, aber die Position der Brücken wird immer besser.

4. Das Verfahren wird nie beendet und die Position der Brücken wird nicht besser.

5. Das Verfahren bricht nie ab, aber falls $a > b$, so wird die Position der Brücken immer besser.

6. Das Verfahren bricht nie ab, aber falls $c > a + b$, so wird die Position der Brücken immer besser.

7. Das Verfahren wird mit der korrekten Lösung beendet, falls der Höhenunterschied zwischen den Brückenenden am Anfang nicht mehr als c beträgt.

8. Das Ritual bricht nie ab, aber die Position der Brücken wird immer besser, falls der Höhenunterschied zwischen den Brückenenden am Anfang mehr als $c + a + b$ beträgt.

9. Das Verfahren bricht nie ab, aber falls $a < b$, so wird die Position der Brücken immer besser.

10. Das Verfahren wird nie beendet, aber die Lösung wird immer besser, wenn beide Brücken am Anfang eine Ausgangslage haben, die nicht waagerecht ist.

Projektbezug:
Diese Aufgabe ist ein einfaches Beispiel eines sogenannten Gebietszerlegungsverfahrens. Wie der Grenzübergang im obigen Beispiel, der aus politischen Gründen aus zwei Brücken statt einer einzigen bestehen muss, so zerfallen auch bei manchen physikalischen Problemen die betrachteten Rechengebiete auf natürliche Weise in Teilgebiete. Es ist dann möglicherweise einfacher, die Teilprobleme mehrfach unter Berücksichtigung der neuesten Ergebnisse auf den Nachbargebieten zu berechnen, als das komplette Problem als Ganzes zu betrachten.
Im Matheon-Teilprojekt A2 wird das mechanische Verhalten von menschlichen Kniegelenken untersucht. Dabei könnte man das gesamte Knie als ein Objekt betrachten. Tatsächlich bestehen Knie aber aus unterschiedlichen Teilen, wie z.B. den Knochen, Menisken, Muskeln, Adern, etc. Diese verhalten sich mechanisch sehr unterschiedlich. Es ist vergleichweise einfach,

für jedes einzelne Teilgebiet das mechanische Verhalten zu simulieren, wenn die Lösung für die umliegenden Gebiete bekannt ist. Darum ist ein Gebietszerlegungsansatz eine gute Möglichkeit, das Gesamtsystem zu simulieren. Es werden, ausgehend von einer beliebigen Startlösung, immer wieder abwechselnd die einzelnen einfachen Teilprobleme gelöst. Da sich mit jeder einzelnen Lösung die Randwerte für die angrenzenden Gebiete verbessern, erwartet man, dass auch das Gesamtsystem auf eine Lösung zustrebt.

16 Weihnachtsbaumfällen

Autor: Dietmar Hömberg
Projekt: C11

16.1 Aufgabe

In diesem Jahr hilft Rut ihrem Vater, einen Weihnachtsbaum zu besorgen. Sie fahren mit ihrem blauen Auto zu einem 2 x 5 km großen rechteckigen Waldstück. Dort finden Sie einen schönen Baum, sägen ihn ab und machen sich auf den Weg zurück zum Auto. Der Baum ist schwer und das Gehen im Wald ist mühsam, deshalb kommen sie im Wald nur mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h voran. Leider hat Ruts Vater kein gutes Orientierungsvermögen, so dass sie statt am Auto an der diagonal entgegengesetzten Ecke des Waldes landen, und zwar genau um 15:16 Uhr. Leider wird um genau 17:00 Uhr der Parkplatz automatisch geschlossen. Wenn die beiden außen um den Wald laufen, kommen sie schneller voran (nämlich mit $v = 4$ km/h). Trotzdem schaffen sie es dann nicht, bis 17:00 Uhr am Auto zu sein. Wenn sie den kürzesten Weg diagonal durch den Wald nehmen, dauert es noch länger. Nach einer Minute (seien wir optimistisch!) hat sich Ruts Vater einen optimalen Weg zum Auto überlegt. Können die beiden es schaffen, rechtzeitig am Auto zu sein?

Antwortmöglichkeiten:

1. Nein, jeder Weg dauert mindestens 1 h 45 min.
2. Nein, jeder Weg dauert mindestens 1 h 45 min 6 s.
3. Nein, bei dem schlechten Orientierungsvermögen von Ruts Vater können sie es sowieso vergessen.
4. Nein, Rut ist von Papas Rechenkünsten nicht überzeugt und will mit dem Taxi nach Hause fahren.
5. Nein, sie kommen erst um 17:02 Uhr beim Auto an.
6. Ja, aber nur, weil das Parkplatztor klemmt und nicht zugeht.
7. Ja, sie haben sogar noch 1,5 min Zeit, vom Parkplatz zu fahren.
8. Ja, sie kommen genau um 16:59 Uhr am Parkplatz an.
9. Ja, aber nur, weil sie unterwegs den Förster treffen, der ihnen hilft, den Baum zu tragen, so dass sie mit 6 km/h vorwärts kommen.
10. Ja, sie kommen locker 15 min vor Schließung an und können in Ruhe noch einen Spekulatius essen.

Projektbezug:
Die Lösung der Aufgabe ist ein Spezialfall des aus der Physik bekannten Fermat'schen Prinzips. Demnach nimmt das Licht immer den zeitminimalen Weg, um von einem Punkt A zu einem Punkt B zu kommen.
Im MATHEON wird in Projekt C11 untersucht, wie ein Bauteil optimal mit Laserlicht bestrahlt werden kann, um bestimmte Strukturänderungen, z. B. das Anschmelzen der Oberfläche hervorzurufen.

17 Geschenke

Autor: Stefan Körkel
Projekt: C12

17.1 Aufgabe

Im Turnverein von Berlin-Adlershof ist Weihnachtsfeier für die kleinen Vereinsmitglieder. Dafür wird der Weihnachtsmann engagiert. Sieben Kinder wurden zur Feier angemeldet, deshalb bringt der Weihnachtsmann sieben Geschenke mit. Zwei Kinder fürchten sich aber so, dass sie an diesem Tag krank werden und deshalb nicht zur Feier kommen. Der Weihnachtsmann hat nun sieben (unterschiedliche) Geschenke für fünf Kinder. Wieviele verschiedene Möglichkeiten hat er, die Geschenke so zu verteilen, dass jedes Kind mindestens ein Geschenk bekommt?

Antwortmöglichkeiten:

1. 5
2. 7
3. 12
4. 21
5. 35
6. 2520
7. 16800
8. 16807
9. 78125
10. 604800

18 Die Elfenstadt

Autoren: Gregor Wünsch, Janina Brenner, Christian Liebchen
Projekte: B 15, B 16

18.1 Aufgabe

Die wichtigsten Helfer des Weihnachtsmanns, die Elfen, haben ein Problem! Ihr Land wurde überschwemmt. Trotzdem lassen die 64 Elfenfamilien den Kopf nicht hängen. Da Elfen ihre Häuser traditionell auf Pfeilern über dem Boden bauen, ist zum Glück alles trocken geblieben. Sie bauen flink für jede Familie ein Boot und möchten außerdem Stege bauen, so dass jedes Haus von jedem anderen Haus entlang eines Weges aus Stegen erreichbar ist. Soweit so gut!
Da ihr Land nach der Überschwemmung jedoch mitten im Meer liegt, denken sich die schlauen Elfen Folgendes: *„Wir müssten die Stege so bauen, dass man vom Meer aus jede Stelle unseres Landes mit dem Boot erreichen kann.“* Das heißt, es sollte kein Gebiet durch einen Kreis von Stegen eingeschlossen werden. Und so fangen die Elfen an zu bauen. Schon nach wenigen Tagen ist die Verbindung aller Häuser mit Stegen vollbracht. Die Lösung der Elfen ist in der Abbildung **??** skizziert.
Doch gerade als sie fertig sind, merken die Elfen, dass sie etwas Wichtiges nicht bedacht haben: Für die Elfenkinder, die noch nicht alleine mit den Booten fahren dürfen, sind die Stege die einzige Möglichkeit, um die Häuser ihrer Freunde zu erreichen. Mit der jetzigen Konstruktion sind viele dieser Wege sehr, sehr lang!
Die meisten Elfenkinder haben sich vor der Überschwemmung mit den Nachbarkindern angefreundet. Und jetzt führt zum Beispiel der Weg von Elfriede aus dem grünen Haus zu Elvira im gelben Haus, die vorher direkt benachbart waren, über 23 Stege. Das gefällt den Elfen nicht! Sie beschließen, die Stege noch einmal neu zu platzieren, diesmal jedoch besser:
Für Elfenfamilien, die horizontal oder vertikal direkt nebeneinander wohnen, soll die durchschnittliche Entfernung zwischen ihren Häusern, gemessen in der Anzahl der Stege, möglichst klein werden. Zwei Häuser, die durch einen Steg verbunden sind, haben zum Beispiel Entfernung 1. Die Entfernungen zwischen den Häusern aller anderen Familien, also zwischen solchen, die „Diagonalnachbarn“ oder gar keine Nachbarn sind, sollen nicht berücksichtigt

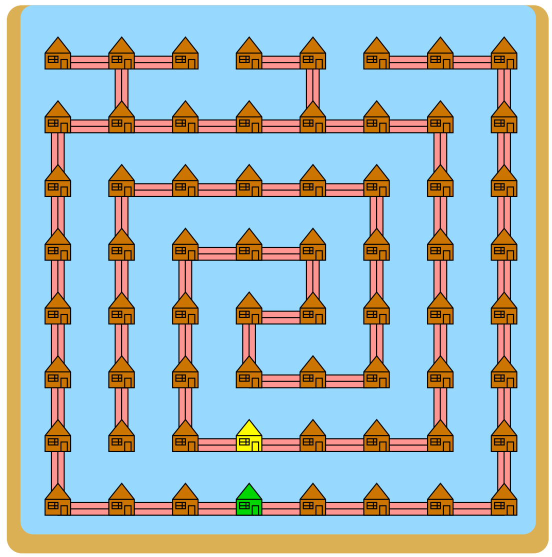


Abbildung 5: Das Elfenreich mit 64 Familien.

werden.
In einer kleineren Elfenstadt sähe die Stegkonstruktion vielleicht so aus wie in Abbildung **??**. Die relevanten Entfernungswerte ergeben eine Summe von 22. *Tipp:* Die angegebene Konstruktion ist nicht optimal!

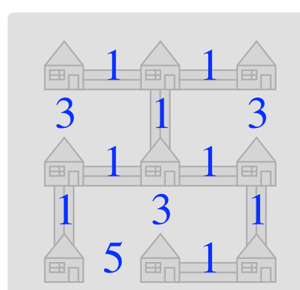


Abbildung 6: Ein kleines Beispiel.

Kannst du den Elfen helfen, die beste Möglichkeit für die Konstruktion der Stege zu finden? *Achtung:* Stege können nur horizontal oder vertikal zwischen benachbarten Häusern gebaut werden; diagonal benachbarte Häuser können nicht direkt verbunden werden. Man kann sich leicht überlegen, dass es gleichbedeutend ist, die durchschnittliche Entfernung oder die Summe der Entfernungen zu minimieren. Welches ist die kleinste der unten stehenden Summen von Entfernungen, die die Elfen erreichen können?

Antwortmöglichkeiten:

1. 273
2. 294
3. 280
4. Die erste Lösung der Elfen war schon optimal.
5. 251
6. 210
7. 336
8. 230
9. 276
10. 217

Tipp: Hilft es, die Entfernungen der Häuser zum offenen Meer per Boot zu minimieren?

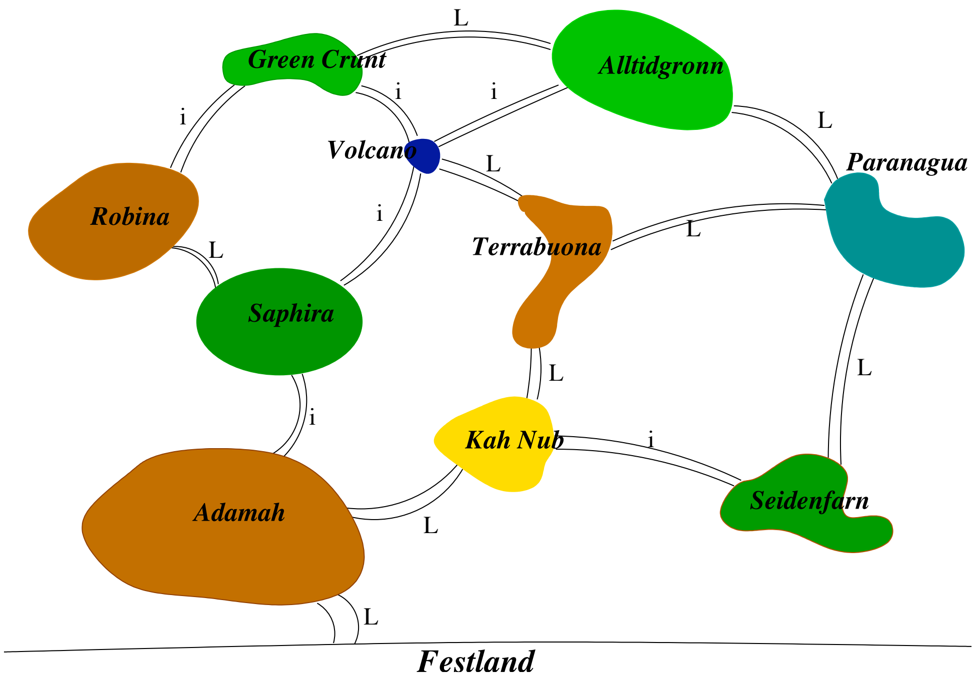
Projektbezug:
Zum einen handelt es sich bei der Suche nach den beschriebenen Strukturen um ein spannendes Forschungsthema (aufspannende Bäume in Gittergraphen, die eine minimale strikt fundamentale Kreisbasis induzieren). So ist aktuell nicht einmal bekannt, ob überhaupt erwartet werden darf, dass es ein effizientes Verfahren geben kann, mit dem für ein Gitter beliebiger (aber fester) Größe der beste solche Baum konstruiert werden kann.
Zum anderen haben sich derartige Kreisbasen in der Vergangenheit als sehr hilfreich bei der Berechnung von Taktfahrplänen mit minimaler netzweiter

Umsteigewartezeit erwiesen, vgl. MATHEON-Projekt B15: Je kürzer die Summe aller "Pfade auf Stegen", desto weniger Möglichkeiten sind bei der Suche nach dem besten Fahrplan zu betrachten.
Nun mögt ihr einwenden, dass Verkehrsnetze im Allgemeinen deutlich anders aussehen als im Elfenland. Dann werft aber am besten einfach 'mal einen Blick auf `http://www.mta.nyc.ny.us/nyct/maps/subwaymap.pdf`, wo ihr zumindest für Teilbereiche ganz ähnliche Strukturen entdecken werdet.

19 Neue Brücken

Autoren: Falk Ebert, Anita Liebenau
Projekt: D13

19.1 Aufgabe



Im Weihnachtswunderland ist der Notstand ausgebrochen. Auf den 10 Inseln Adamah, Kah Nub, Seidenfarn, Saphira, Terrabuona, Paranagua, Robina, Volcano, Green Crunt und Alltidgrönn packen die kleinen Weihnachtswichtel eigentlich immer die vielen Geschenke ein. Nun wurde aber kurz vor dem Heiligen Abend festgestellt, dass die Verbindungsbrücken zwischen den Inseln entweder labil (L) oder instabil (i) sind. Bevor die Rentiere die vielen Geschenke zu ihren Bestimmungsorten bringen können (über dem Inselatoll darf nicht geflogen werden!), müssen die alten Brücken durch stabile ersetzt werden.

Dabei sind nun einige Regeln zu beachten:

I Da man instabile Brücken gar nicht mehr betreten kann, können an solchen Stellen auch keine stabilen gebaut werden.

II Wird eine labile Brücke durch eine stabile ersetzt, so muss eine Schnittlinie durchs Atoll gezogen werden, die die Inselgruppe in zwei Teile zerlegt (das Festland darf als Insel betrachtet werden). Diese Schnittlinie muss durch die Brückenverbindung laufen, die ersetzt werden soll und darf keine andere Schnittlinie schneiden.

III Aus Gründen des Denkmalschutzes dürfen keine (labilen) Brücken ersetzt werden, durch die schon eine Schnittlinie verläuft.

Beispiel:

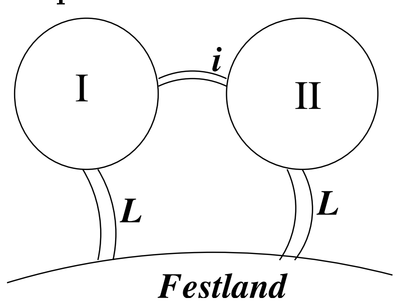


Abb.2

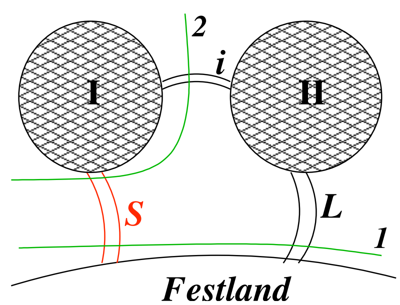


Abb.3

Ersetzt man im Beispiel die labile Brücke zwischen Insel I und dem Festland, so stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung, eine Schnittlinie zu ziehen. Nach Möglichkeit 1 kann man dann nicht mehr Insel II mit dem Festland durch eine stabile Brücke verbinden. Möglichkeit 2 verbietet lediglich, die instabile Brücke zwischen Insel I und Insel II zu ersetzen (was ohnehin nicht erlaubt wäre).

Befolgt man die vorstehenden Regeln, welche Inseln können dann nicht durch stabile Brücken mit dem Festland verbunden werden?

Antwortmöglichkeiten:

1. Keine - Jede Insel lässt sich vom Festland aus über stabile Brücken erreichen.

2. Seidenfarn
3. Alltidgrønn
4. Robina
5. Alltidgrønn und Green Crunt
6. Saphira und Robina
7. Paranagua und Alltidgrønn
8. Green Crunt, Robina und Saphira
9. Robina, Seidenfarn und Alltidgrønn
10. Robina, Alltidgrønn und Saphira

Projektbezug:
Ob man es glaubt oder nicht, die ganze Brückenbauerei hat einen Hintergrund in der Elektrotechnik. Konkret geht es dabei um Schaltkreissimulation. Dabei werden Gleichungen aufgestellt, die das physikalische Verhalten eines elektrischen Schaltkreises beschreiben. Anschließend werden diese Gleichungen auf dem Computer mit entsprechenden Programmen gelöst. Da ein Computer prinzipiell dumm ist, passiert es, dass er Probleme mit dem automatischen Lösen gewisser Gleichungen bekommt. Zum Beispiel können genau solche Gleichungen entstehen, wenn ein Schaltkreis sogenannte *LI-Schnittmengen* enthält. Dabei ist L typischerweise die Bezeichnung für eine Induktivität (z.B. eine Spule) und I steht für eine Stromquelle. Eine LI-Schnittmenge ist eine Menge von solchen Schaltelementen, die, wenn man sie aus dem Schaltkreis entfernt, diesen in zwei nicht mehr verbundene Teile trennen - allerdings so, dass, sobald man eines der Elemente wieder einfügt, wieder alle Teile verbunden sind. Prinzipell entspricht das einer Schnittlinie durch das Atoll. Man kann aber die Gleichungen für den Computer wieder einfacher lösbar machen, wenn man eine Spule aus dieser Schnittmenge auswählt und durch eine spezielle Stromquelle ersetzt. Diese Stromquelle hängt von den anderen Elementen der LI-Schnittmenge ab und damit dürfen die dann nicht mehr verändert werden. Diese Elementersetzung entspricht der Restaurierung einer labilen Brücke nach allen Regeln des Denkmalschutzes. Das Ziel ist es,

sämtliche Schnittmengen im Schaltkreis so zu verändern, damit letztendlich die Gleichungen für den Computer einfach lösbar sind. Und genau das war ein Teilproblem, mit dem wir uns in den Projektgruppen D2 und D13 in den letzen beiden Jahren herumgeschlagen haben.

20 Das Geschenkpapierproblem

Autoren: Brigitte Lutz-Westphal, Marc Pfetsch
Projekte: Z1.3, B12

20.1 Aufgabe

Pech für Fridolin! „Fridolin, Sie verpacken dieses Jahr die Geschenke für unsere besten Kunden!“ hatte ihm seine Chefin am Morgen mitgeteilt. Seitdem hat er furchtbar schlechte Laune. Das Schlimmste ist jedoch, dass er die Geschenke nicht so verpacken darf, wie er Lust hat. Die Chefin hatte gar nicht mehr aufgehört, noch weitere Anweisungen zu geben: „Denken Sie daran, dass Sie nur Geschenkpapier in den Farben unseres Logos verwenden dürfen!“ (Das Logo der Firma verwendet die Farben Rot, Blau, Gelb und Grün.) „Wir konnten aus Gründen der Sparsamkeit nur einfarbiges Geschenkpapier besorgen.“ (Die Firma ist in Berlin.) „Auch in diesem Jahr müssen wir darauf achten, dass befreundete Firmenchefs keine gleich aussehenden Geschenke bekommen!“ (Wie überall gibt es auch hier jede Menge Eitelkeiten und Konkurrenzkämpfe.) Sie ratterte in Windeseile herunter, welche Firmen nicht die gleiche Farbe bekommen dürfen (Nennen wir die Firmen – der Diskretion wegen – A, B, . . . bis H.):

A und D	B und G	D und G
A und E	C und D	D und H
A und G	C und E	E und G
A und H	C und F	F und G
B und C	C und G	F und H
B und E	D und F	G und H

Fridolin ist noch ganz schwindelig von diesen vielen Anweisungen. 18 Vorschriften muss er bei der Wahl des Geschenkpapiers beachten! „Das ist ja wohl etwas übertrieben!“ denkt er für sich, setzt sich dann aber doch an seinen Schreibtisch und fängt an nachzudenken. Verschiedene Dinge fallen ihm auf, als er sich das Problem genauer ansieht. Leider hat er gar keinen klaren Kopf vor lauter schlechter Laune. Er wollte doch heute etwas früher Feierabend machen . . .

Welche seiner Überlegungen ist richtig?

1. Es gibt 5 Firmen, so dass je zwei davon nicht dieselbe Farbe bekommen dürfen. Deshalb reichen 4 verschiedene Geschenkpapiere nicht aus, wenn alle Vorschriften eingehalten werden.

2. Es gibt 8 Firmen, also braucht man höchstens $\frac{8}{4} = 2$ verschiedene Farben um die Geschenke zu verpacken (wenn alle Vorschriften erfüllt werden).

3. Die Geschenke von Firma A und C müssen die gleiche Farbe erhalten, wenn alle Vorschriften eingehalten werden.

4. Es gibt keine Vorschriften zwischen Firmen A und B, zwischen Firmen B und F und zwischen Firmen F und A, also braucht man höchstens 3 verschiedene Geschenkpapiere, wenn man alle Vorschriften befolgt.

5. Wenn man das Geschenk von Firma A rot verpackt und alle Vorschriften einhält, dann gibt es nur eine Möglichkeit die Geschenke zu verpacken.

6. Firma G ist an 7 Vorschriften beteiligt, deshalb braucht man mindestens $7 + 1 = 8$ Farben, wenn alle Vorschriften befolgt werden.

7. Wenn alle Vorschriften eingehalten werden, dann gibt es genau 25 verschiedene Möglichkeiten, die Geschenke zu verpacken.

8. Wenn die Geschenke von Firmen A, C, E, G und I rot eingepackt werden und die von B, D, F und H grün, dann werden alle Vorschriften erfüllt.

9. Wenn man die Firmen in der Reihenfolge A, B, C, $\ldots$, H betrachtet, dann gibt es Vorschriften zwischen B und C, zwischen C und D, zwischen F und G, zwischen G und H. Es gibt aber keine Vorschriften zwischen A und B, zwischen D und E, sowie zwischen E und F. Deshalb benötigt man nur drei verschieden Geschenkpapiere, wenn alle Vorschriften eingehalten werden.

10. Wenn alle Vorschriften erfüllt werden, dann können die Geschenke von Firma E und F nicht die gleiche Farbe erhalten.

Projektbezug:

Graphenfärbungen spielen z. B. eine Rolle, wenn es um die Frequenzzuweisung in Mobilfunknetzen geht (Matheon-Projekt B4). Hierbei entsprechen Mobilfunkteilnehmer den Firmen und die Farben der Geschenkpapiere möglichen Frequenzen, auf denen die Handys senden. Die Vorschriften ergeben sich dadurch, dass die benutzten Frequenzen bestimmter Teilnehmer nicht gleich sein dürfen, sonst stören sich die Gespräche.
Im Geschenkpapierproblem spielen Symmetrien eine Rolle. Ähnliche Symmetrien kommen in vielen praktischen Aufgabenstellungen vor. Um mit Hilfe des Computers schnell Lösungen berechnen zu können, müssen die Symmetrien bei der Entwicklung von Lösungsmethoden berücksichtigt werden. Dies wird in Matheon-Projekt B12 untersucht.
Themen der kombinatorischen Optimierung haben in Berlin durch Matheon-Projekte den Weg in den Lehrplan gefunden. Im Projekt Z1.3 wird derzeit eine Unterrichtssoftware entwickelt, mit der an Graphen und Graphenalgorithmen experimentiert werden kann.

21 Das Schmücken des Weihnachtsbaums

Autoren: Janina Brenner, Guido Schäfer
Projekt: B 16

21.1 Aufgabe

Dieses Jahr haben sich die Seebären in Heiligenhafen ein ganz besonderes Projekt ausgedacht. Sie wollen einen großen Weihnachtsbaum aufstellen, der von allen Schiffen draußen auf dem Meer zu sehen ist. Dazu bauen sie ein großes Stahlgerüst aus lauter Dreiecken mit der Grundseite ein Meter. An den Eckpunkten der Dreiecke möchten sie große strahlende Lichter befestigen. Dafür stehen Glühbirnen in drei Farben zur Verfügung: weiße, rote und blaue.

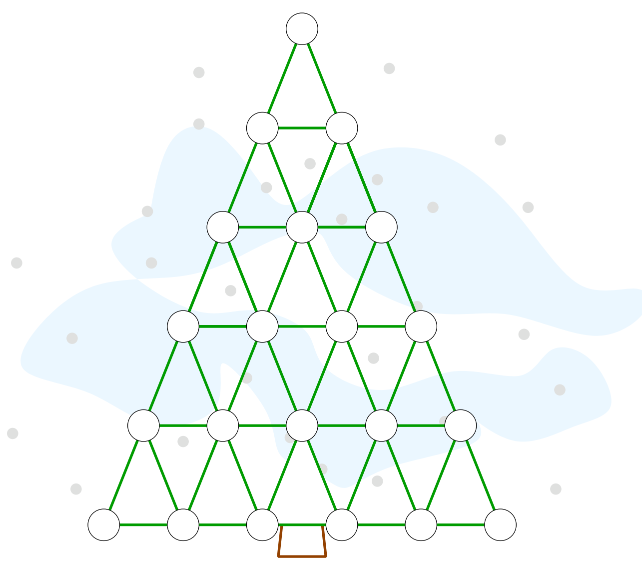


Abbildung 7: Ein Weihnachtsbaumgerüst

1. Ties, der für das Aussehen des Weihnachtsbaums verantwortlich ist, hat sich überlegt, dass es schön wäre, wenn die Spitze und die Seiten des Baumes mit weißen Lampen geschmückt würden. Die untere Kante möchte er abwechselnd mit roten und blauen Birnen versehen. In

Abbildung **??** könnt ihr ein Beispiel für einen zugegebenermaßen noch sehr kleinen Weihnachtsbaum sehen. Für die restlichen, im Bild grauen Lampen, lässt Ties den Bauingenieuren freie Farbwahl.

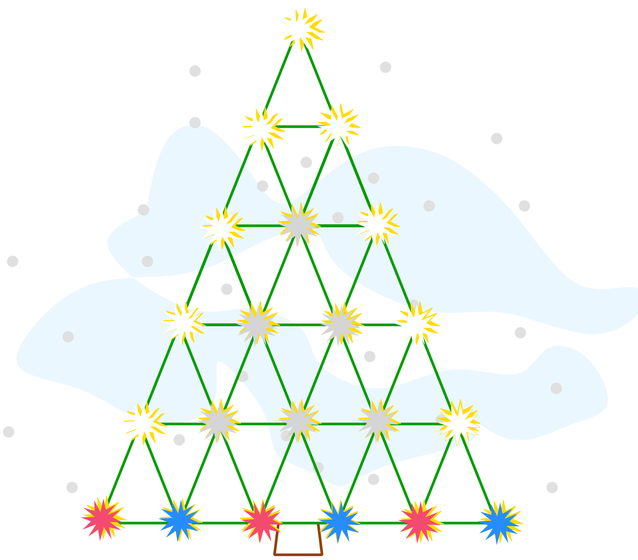


Abbildung 8: Ties Farbvorgaben

Ties stellt sich die Frage, bei wie vielen der kleinen Dreiecke (mit einer Grundseite von einem Meter) wohl alle drei Ecken mit verschiedenfarbigen Lampen versehen werden. Wie viele sind es mindestens?

2. Aus mathematischer Sicht ist auch das folgende Problem interessant: Angenommen, die 3 Außenecken eines solchen Gerüstes sind wie bisher weiß, blau und rot gefärbt. Alle anderen Glühbirnen dürfen frei gewählt werden; mit der Einschränkung, dass für die Lampen auf den Außenseiten des Gerüstes jeweils nur die Farben der beiden angrenzenden Außenecken gewählt werden dürfen. Wie viele kleine Dreiecke, deren Ecken mit drei verschiedenen Farben gefärbt sind, gibt es dann mindestens?

Frage:
Wenn das Gerüst $k \geq 3$ Meter breit ist, wie viele dreifarbige Dreiecke kommen dann in den beiden Fällen (1. und 2.) mindestens vor? (Wie ihr leicht

merkt, muss k für Ties Farbwahl ungerade sein. Bitte setzt dies für die Beantwortung der ersten Frage voraus.)

Antwortmöglichkeiten:

1. 2 und 0
2. 2 und 1
3. jeweils 2
4. $k-2$ und $k-3$
5. 3 und 0
6. 3 und 1
7. k und 2
8. jeweils $\lfloor\sqrt{k}/2\rfloor$
9. k^2-2k+1 und k^2-2k
10. 4 und 2

Projektbezug:
Im Projekt B 16 beschäftigen wir uns mit mathematischen Problemen aus dem Bereich der Spieltheorie. Die Spieltheorie befasst sich mit der Analyse von Situationen, in denen eine Vielzahl von Nutzern (sog. Spielern) miteinander interagieren und sich durch ihr Handeln gegenseitig beeinflussen. Ein wichtiges Konzept in diesem Zusammenhang ist das *Nash-Gleichgewicht*. Grob gesagt ist ein Nash-Gleichgewicht ein Zustand, in dem alle Spieler zufrieden sind (keiner möchte von dem Zustand abweichen). Ein fundamentaler Satz der Spieltheorie besagt, dass es für eine große Klasse von Spielen immer ein Nash-Gleichgewicht gibt. Der Beweis dieses Satzes beruht unter anderem auf dem im zweiten Teil der Aufgabe gestellten Färbungsproblem.

22 Elfenfunk

Autoren: Andreas Eisenblätter und Hans-Florian Geerdes
Projekt: B4

22.1 Aufgabe

Von Jahr zu Jahr werden mehr Geschenke zu Weihnachten verschenkt. Das stellt den Weihnachtsmann vor immer größere logistische Herausforderungen. Zum Glück hat er seine Elfen, die ihm helfen – aber darüber hinaus bedient er sich auch der modernsten Technik. Wegen der vielen Geschenke wurde vor einigen Jahren ein zweiter Verladehof eingerichtet, auf dem die Elfen die Geschenke auf Schlitten packen. Da sich oft noch Änderungen in letzter Minute ergeben, kommuniziert die Wunschzettelabteilung am Nordpol mit den Elfen auf den Verladehöfen über Handys. Der Weihnachtsmann hat ein Mobilfunksystem entwickelt, das UMTS ähnlich ist, und zwei Funkantennen aufstellen lassen, für jeden Hof eine. Um solide planen zu können, muss der Weihnachtsmann wissen, wie viele Elfen in diesen beiden Funkzellen gleichzeitig telefonieren können.
Jede Zelle hat eine maximale Funkleistung von 10 W. Damit die Handys der Elfen das Netz überhaupt "sehen" können, muss 1 W von dieser Leistung auf eine Art Leuchtfeuersignal, das sogenanntes Pilot-Signal, verwendet werden. Die restlichen 9 W können in jeder Zelle für die Funkverbindungen zu den einzelnen Elfen genutzt werden.
Bei der eingesetzten Technik stören sich allerdings die Verbindungen in den einzelnen Zellen und auch die Zellen untereinander gegenseitig. Damit die Funkverbindung zu einem Handy aufrechterhalten werden kann, muss das Signal-zu-Störsignal-Verhältnis (SSV) des Handys mindestens zwei Prozent betragen. Das Signal-zu-Störsignal-Verhältnis berechnet sich als das Verhältnis der Empfangsleistungen im Handy zwischen dem Signal, das für das Handy bestimmt ist, zu der Summe aller anderen empfangenen Signale.
Wenn also nur eine Zelle betrieben würde, in der eine einzelne Elfe von der Zentrale angerufen und hierfür 0,5 W Sendeleistung aufgebracht würden, dann wäre das Signal-zu-Störsignal-Verhältnis:

$$\text{SSV} = \frac{\text{Handysignal}}{\text{Pilot}} = \frac{0,5\,\text{W}}{1\,\text{W}} = 50\,\%.$$

Das SSV wäre also größer als 2 %, und das Handy wäre versorgt. Wenn aber für die Verbindung nur 0,01 W genutzt würde, dann könnte das Handy nicht bedient werden, weil gilt:

$$\text{SSV} = \frac{0,01\,\text{W}}{1\,\text{W}} = 1\,\%.$$

Diese beiden Rechnungen machen sich zunutze, dass das gewünschte Signal und das störende Pilot-Signal von derselben Zelle abgestrahlt werden und sich auf dem Weg zum Handy in gleicher Weise abschwächen. Hier wurde das Verhältnis der Empfangsleistungen einfach aus dem Verhältnis der Sendeleistungen ermittelt. Werden zwei oder mehr Zellen betrieben, kann diese Vereinfachung nicht mehr gemacht werden.
Wenn Handys in beiden Zellen gleichzeitig benutzt werden, dann stören sich die Zellen auch gegenseitig. Allerdings erreicht das Signal den anderen Hof schwächer als den eigenen. Die Elfen haben ausgemessen, dass Signale für Hof 1 im Hof 2 fünfmal schwächer und Signale für Hof 2 in Hof 1 siebenmal schwächer ankommen.
Wenn in Hof 1 ein Handy mit 0,7 W bedient wird und in Hof 2 ein Handy mit 0,5 W, dann gilt für das SSV des Handys auf Hof 1:

$$\begin{aligned} \text{SSV Hof 1} &= \frac{\text{Handysignal 1}}{\text{Pilot 1} + 1/7\ (\text{Pilot 2} + \text{Handysignal 2})} \\ &= \frac{0,7\,\text{W}}{1\,\text{W} + (1/7)\cdot(1\,\text{W} + 0,5\,\text{W})} \simeq 57,6\,\%. \end{aligned}$$

Für das Handy auf Hof 2 gilt:

$$\begin{aligned} \text{SSV Hof 2} &= \frac{\text{Handysignal 2}}{\text{Pilot 2} + 1/5\ (\text{Pilot 1} + \text{Handysignal 1})} \\ &= \frac{0,5\,\text{W}}{1\,\text{W} + (1/5)\cdot(1\,\text{W} + 0,7\,\text{W})} \simeq 37,3\,\%. \end{aligned}$$

Es können also beide Verbindungen parallel betrieben werden.
Zunächst telefoniert keine Elfe, aber nach und nach müssen immer mehr Änderungen der Wunschzettel an die Elfen weitergeben werden. Hat die Zentrale eine Elfe erreicht, bleibt die Verbindung bestehen. Denn vielleicht ergibt sich ja gleich schon die nächste Änderung.
Wenn es für eine der beiden Zellen die Möglichkeit gibt, noch eine Elfe auf ihrem Hof zu bedienen, so wird sie das sofort tun und ihre Sendeleistung entsprechend aufteilen. Dabei geht sie davon aus, dass die andere Zelle zunächst

ihre Sendeleistung nicht ändert. Es ist der Zelle zu diesem Zeitpunkt aber nur wichtig, dass das SSV für alle Elfen auf dem eigenen Hof stimmt.
Wenn es durch die Hinzunahme der Elfe in der einen Zelle dazu kommt, dass eine oder mehrere Elfen in der anderen Zelle auf einmal ein SSV unter 2 % haben, dann versucht die andere Zelle, die Sendeleistungen so anzupassen, dass dies behoben wird – wieder nur mit Rücksicht auf die eigenen Elfen. Wenn das für eine oder mehrere Elfen nicht möglich ist, dann bricht deren Funkverbindung zusammen.
Dem Weihnachtsmann raucht bei soviel Technik der Kopf ... aber eines muss er wissen: stellt sich irgendwann ein Zustand ein, in dem keine Elfen mehr im Gespräch unterbrochen werden? Denn nur dann kann ja die Geschenkeverteilung reibungslos klappen! Und wenn ja, wieviele Elfen telefonieren dann auf welchem Hof?

Antwortmöglichkeiten:

1. Nein, die beiden Zellen werden sich die ganze Zeit gegenseitig stören und immer wieder gegenseitig Elfen aus dem Netz werfen. Der Weihnachtsmann sollte sich besser nicht auf die Technik verlassen!
2. Ja, nach einer Weile werden beide Zellen eine maximale Anzahl von Elfen bedienen und die Situation stabilisiert sich. Auf beiden Höfen telefonieren dann 50 Elfen.
3. Ja, die Situation stabilisiert sich bei 5 Elfen auf Hof 1 und 7 Elfen auf Hof 2.
4. Ja, die Situation stabilisiert sich bei 45 Elfen auf Hof 1 und 47 Elfen auf Hof 2.
5. Ja, die Situation stabilisiert sich bei 40 Elfen auf Hof 1 und 38 Elfen auf Hof 2.
6. Ja, die Situation stabilisiert sich bei 32 Elfen auf Hof 1 und 41 Elfen auf Hof 2.
7. Ja, die Situation stabilisiert sich bei 35 Elfen auf Hof 1 und 27 Elfen auf Hof 2.
8. Ja, die Situation stabilisiert sich bei 36 Elfen auf Hof 1 und 34 Elfen auf Hof 2.

9. Ja, die Situation stabilisiert sich bei 36 Elfen auf Hof 1 und 33 Elfen auf Hof 2.
10. Ja, der Zustand kann sich stabilisieren. Aber wieviele Elfen dann auf welchem Hof telefonieren, hängt dann davon ab, wie sich die Situation entwickelt hat.

Projektbezug:

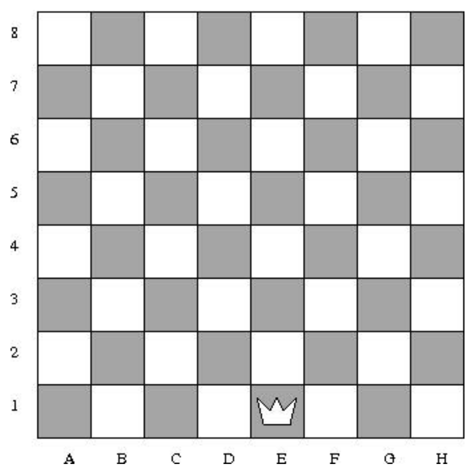
Das MATHEON-Projekt B4 beschäftigt sich mit der Planung und optimalen Konfiguration von UMTS-Funknetzen. Das Problem ist eine vereinfachte Fragestellung aus der Lastkontrolle. Mit Methoden, die in dem Projekt entwickelt werden, lassen sich solche Fragen unter reellen Bedingungen sofort lösen, ohne lange herumzuprobieren!

23 Der Königsweg

Autoren: Andreas Loos / Günter M. Ziegler
Projekt: F1 Discrete surface parametrization

23.1 Aufgabe

Susi, dem Schneehuhn, war stinklangweilig. Das ganze Jahr über spielte sie Schach, mal mit dem Nikolaus und mal mit Knecht Ruprecht. Doch jetzt, in der Vorweihnachtszeit, hatten die beiden keine Zeit mehr: Knecht Ruprecht polierte stundenlang die Kufen des Schlittens mit Skiwachs, um es später beim Ziehen leichter zu haben. „Ein Rentier! Dass ich nicht lache! Hier gibt's nur Rentner, keine Rentiere", schimpfte er dabei vor sich hin. Von Weihnachtslegenden hielt Ruprecht nicht viel. Und Nikolaus selbst hatte Susi schon seit Tagen nicht mehr gesehen, weil er von morgens bis abends Geschenke packte.
Susi seufzte. Vor ihr stand das Spielbrett, und darauf einsam der weiße König auf dem Feld E1:



Susi Schneehuhn ließ den König ein paar Schritte machen, nach den Regeln des Schachspiels: Immer von einem Feld ins nächste horizontal, vertikal oder diagonal benachbarte Feld. Nach einem Schritt kam der König in einem der Felder D1, D2, E2, F2 oder F1 zum Stehen. Mit sieben Schritten konnte er es zum Beispiel bis zum Eckfeld A8 schaffen. Da stutzte Susi: Es gab mehrere Wege zwischen E1 und A8!

Aufgeregt begann sie, mit dem Schnabel die Wege in den Schnee zu ritzen, die einen König in sieben Schritten von E1 nach A8 führen. Dann hüpfte Susi ein paar Schritte zurück und betrachtete ihre Zeichnung stolz. Sie konnte jetzt sogar auf Anhieb sagen, wie viele Wege den König in sieben Schritten von E1 nach A8 bringen – und dabei über das Feld B7 führen.

Wie viele der Wege sind das?
Antwortmöglichkeiten:

1. Gar kein Weg.
2. Genau ein Weg.
3. 2 Wege
4. 5 Wege
5. 2^3 Wege
6. 3^2 Wege
7. 32 Wege
8. 50 Wege
9. 265 Wege
10. 3^8 Wege

Projektbezug:
Die Anzahl der einfachen Wege in Graphen zu bestimmen, ist ein typisches graphentheoretisches Problem. Man kann das Problem von Susi Schneehuhn zum Beispiel als Netzwerkfluss interpretieren: Der Startpunkt E1 ist eine Quelle und der Zielpunkt A8 eine Senke. Schickt man über jeden Weg von E1 nach A8 jeweils eine Einheit Waren, dann kommen am Ziel so viele Einheiten Waren an, wie Wege zum Ziel führen. Bei Ausfall eines Knotens im Netzwerk fällt genau die Anzahl der Flüsse, die über diesen Knoten führen, weg.

24 Schlittenfahrt durch die Zeit

Autor: Olaf Teschke
Projekt: Z1

24.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann - dessen Schlitten sich bekanntlich auch in der Zeit bewegen kann, damit er überall pünktlich ist - soll sechs verschiedenen Mathematiker(inne)n in unterschiedlichen Jahren Weihnachtsgeschenke bringen. Leider ist der Weihnachtsmann etwas zerstreut und hat die genauen Auslieferungsjahre vergessen. Auf seinem Notizblock steht nur noch eine Prüfsumme, die aus der Summe der Quadrate der Jahreszahlen besteht, deren letzte Ziffer aber durch eine dicke Schneeflocke verwischt ist.

Zum Glück erinnert sich der Weihnachtsmann noch an einige Details. So sind fünf der Jahreszahlen Primzahlen; außerdem weiß er noch einiges aus dem Leben der Beschenkten:

Der erste Mathematiker passte im Laufe von (manchmal erzwungenen) Wohnsitzwechseln mehrfach seinen Namen dem Aufenthaltsort an. Er war auf einer Reihe von Gebieten der Mathematik tätig, von den Grundlagen bis hin zu weitreichenden Anwendungen. Leider zeitigten diese einige Nebenwirkungen - ein von ihm entworfenes Computermodell macht Viren ihre Tätigkeit besonders leicht, und er erkrankte später schwer an den Folgen von Experimenten mit seiner durchschlagendsten Anwendung. Das machte ihn freilich posthum zum Star - er war das Vorbild für den Titelhelden eines bekannten Films.
Der Weihnachtsmann bringt ihm ein Geschenk in dem Jahr, in dem seine Arbeiten zu logischen Grundlagen der Mathematik und zur Mathematisierung der Quantenmechanik veröffentlicht werden.

Die Zweite lernte Mathematik neben vielen anderen Dingen von ihrem Vater, den sie bald übertraf - vielen galt sie als die umfassendste Wissenschaftlerin ihrer Zeit, die auch in der Philosophie, Literatur und Astronomie glänzte. In ihrer Heimatstadt wurde ihr ein Lehrstuhl für Philosophie an einer der berühmtesten Universitäten der Epoche eingeräumt. Ob sie auch an der anderen Elite-Uni jener Zeit gelehrt hat, ist nicht ausreichend belegt; doch ist sie wahrscheinlich in einem späteren berühmten Renaissancegemälde dieser Bildungsstätte als einzige Frau verewigt worden. Leider nahm sie ein tragisches Ende - Anhänger eines radikalen Erzbischofs nahmen Anstoß an ihr und ermordeten sie auf grausame Weise. Der Erzbischof wurde später von der katholischen Kirche heiliggesprochen.

Der Weihnachtsmann bringt ihr ein Geschenk sechs Jahre vor ihrem Tod.

Der Dritte konstruierte in seiner Jugend ein wunderschönes (leider sehr ungenaues) Modell des Planetensystems, indem er die Umlaufbahnen der damals bekannten fünf Planeten zu den fünf platonischen Körpern in Beziehung setzte. Noch bevor die Entdeckung eines weiteren Planeten dieses harmonische Bild zerstören konnte, fand er allerdings eine wesentlich bessere Beschreibung. Eine vom ihm gestellte Frage wurde erst Jahrhunderte später beantwortet und löste unter Mathematikern einen tiefen Zwist darüber aus, was man unter einem Beweis versteht. Sein Werk über die Entstehung der Schneeflocke wird dagegen einhellig von allen Weihnachtselfen gelobt. Obwohl er riesige astronomische Berechnungen vollbrachte und äußerst genaue Planetentafeln für die Schifffahrt aufstellte, verdankte er den größten Teil seines Lebensunterhalts der angewandten Astronomie (im Sinne jener Zeit), nämlich der Erstellung von Horoskopen. Durch diese Tätigkeit erlangte er die Protektion der Mächtigen, konnte aber nicht verhindern, dass seine Mutter als Hexe angeklagt und gefoltert wurde.

Der Weihnachtsmann bringt ihm ein Geschenk in seinem Geburtsjahr - mit drei Tagen Verspätung.

Der Vierte war sehr vielseitig - neben seiner mathematischen Tätigkeit war er u.a. auch Philosoph, Redakteur, Profisportler und Landwirt. Mit seinem Bruder zusammen verfasste er auch ein Theaterstück, das allerdings nicht sehr erfolgreich war - die eigentliche literarische Berühmtheit der Familie war die erste Frau seines Bruders, die auch heute noch als herausragende Lyrikerin verehrt wird. In der Mathematik bewies er fundamentale Sätze in der Algebra - einer davon wurde zumindest teilweise nach ihm benannt, andere tragen fremde Namen. Als Außenseiter in der Wissenschaft blieb ihm trotz seiner Leistungen eine Professur verwehrt. So musste er sein Geld vor allem als (Denk-)Sportler verdienen, wobei er es bis zum Weltmeister brachte.

Der Weihnachtsmann bringt ihm ein Geschenk in dem Jahr, in dem er an der Universität Erlangen in Mathematik promovierte.

Der Fünfte hatte dieselbe Nationalität wie der erste und übertraf ihn sogar in seiner Reiselust, hatte allerdings eine deutliche Abneigung gegen dessen explosive Experimente. Berühmt ist er für die Vielzahl und Bandbreite seiner Veröffentlichungen, die oft mit Koautoren entstanden. Dies führte auch zur Definition einer berühmten nach ihm benannten Zahl. Bekannt ist auch seine Exzentrizität und Drogensucht - aufgrund einer Wette setzte er zwar einmal seinen Konsum aus, beklagte aber den dadurch entstandenen Schaden an der Mathematik. Seine Vorstellung eines göttlichen Buches der Beweise führte später zu einem mathematischen Bestseller - was ihn angesichts seiner völligen materiellen Bedürfnislosigkeit kaum gerührt hätte. Auch den Cole-Preis der American Mathematical Society, den ihm Weihnachtsmann brachte, stiftete er anderen.

Nummer sechs zeigte schon früh seine mathematische Begabung, ebenso wie seine Liebe zur Musik und für ausgedehnte Wanderungen. Nachdem er einige Jahre in gutbezahlten Positionen im Ausland tätig war, meinte er genügend Geld zu haben, um für den Rest seines Lebens in Ruhe unabhängig Mathematik treiben zu können. Er kehrte nach Hause zurück, wo er sehr zurückgezogen über eine Theorie nachdachte, mit der unter anderem ein berühmtes Jahrhundertproblem bewiesen werden konnte. Seinen Beweis dazu publizierte er im Internet, lehnte es aber ab, einen Preis für seine Leistung entgegenzunehmen - er wolle nicht Galionsfigur einer mathematischen Gemeinschaft werden, der er sich nicht mehr zugehörig fühle.
Der Weihnachtsmann bringt ihm sein Geschenk in dem Jahr, in dem er die Publikation seines Beweises im Internet abschloss.

Antwortmöglichkeiten:
Die Zahl auf dem Notizblock lautet:

1. 17792490
2. 17792491
3. 17792492
4. 17792493
5. 17792494

6. 17792495
7. 17792496
8. 17792497
9. 17792498
10. 17792499

Projektbezug:

Im Projekt Z1 - Mathematik an der Schule - werden Aufgabenstellungen erarbeitet, die die Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen aus verschiedenen Blickwinkeln motivieren soll. Ein typisches Beispiel dafür ist das Kodieren von Information und die Diskussion unterschiedlicher Lösungsmöglichkeiten für eine Aufgabe. Dabei sollen Schüler ein Gefühl dafür entwickeln, dass Mathematik nicht in der stumpfen Abarbeitung eines Algorithmus unter dem einengenden Ziel einer fixierten Anwendung besteht, sondern vor allem von kreativem und unabhängigem Denken lebt. Indem wir die Vielfalt der mathematischen Ideen - auch im Wandel der Geschichte - lebendig werden lassen, soll die Begeisterung für das Fach geweckt werden.