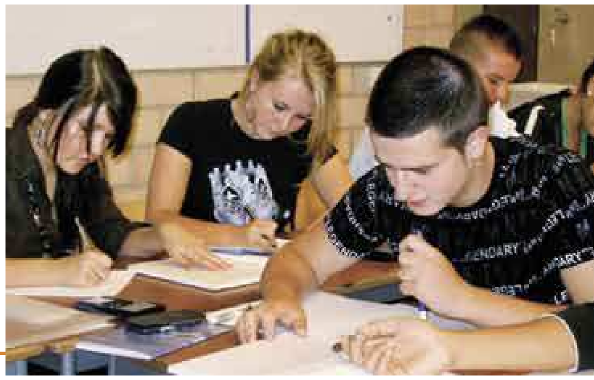
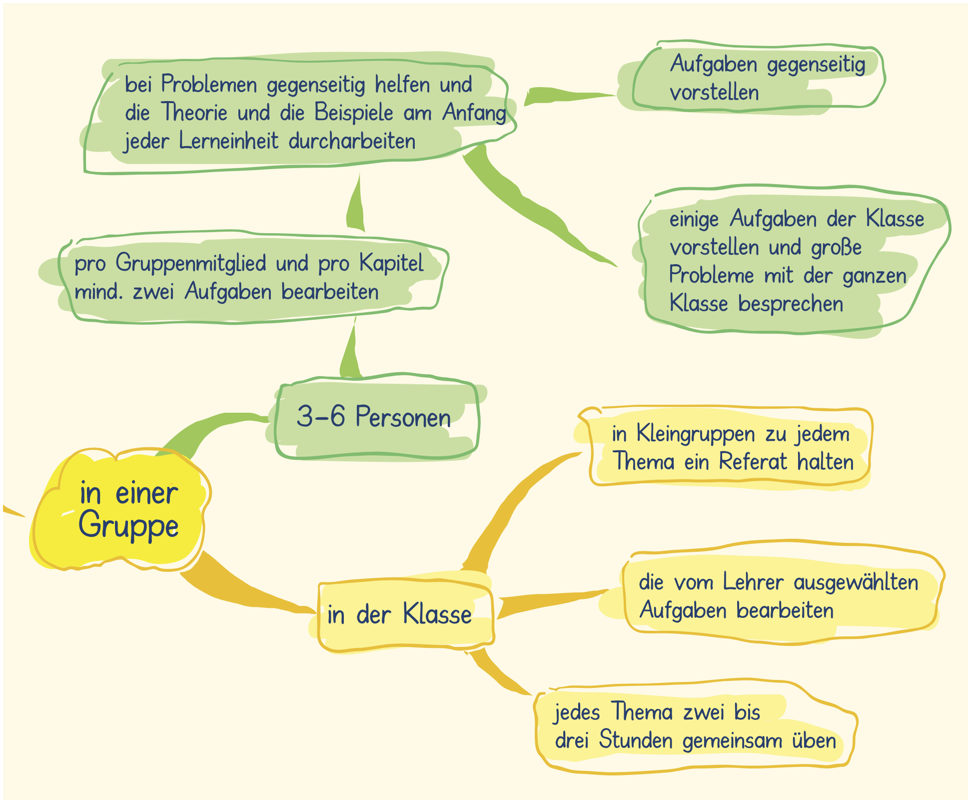
Das kannst du schon

- Terme umformen
- Gleichungen aufstellen und lösen
- Funktionsgraphen zeichnen
- Wahrscheinlichkeiten berechnen



VI Kompetenzen trainieren und vertiefen

Übung macht den Meister



Das kannst du bald

- sicherer mit Aufgaben umgehen
- schneller Lösungsideen finden
- bei kniffligen Aufgaben ausdauernder sein
- dich besser auf Tests vorbereiten

Teste dich selbst

Auf den Seiten 251ff. findest du Lösungen zu den Aufgaben.

Mithilfe der folgenden Aufgaben kannst du dich selbst testen und anschließend einschätzen, in welchen Bereichen du bereits sicher bist und wo du noch Übungsbedarf hast. Die Aufgaben sind nach inhaltlichen Gebieten geordnet, wie zum Beispiel dem Rechnen mit Zahlen und Variablen oder der Geometrie. In vielen Aufgaben werden neben den inhaltlichen Themenbereichen auch deine Fähigkeiten im Argumentieren, Problemlösen oder auch Modellieren getestet. Du musst bei jeder Aussage entscheiden, ob sie wahr oder falsch ist, und deine Entscheidung begründen.

Wahr oder falsch? Begründe.

Rechnen mit Zahlen und Variablen

Terme

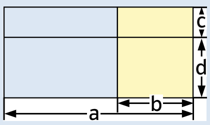


Fig. 1

1 a) $5x - 2 = 3x$
b) Die blaue Fläche in Fig. 1 lässt sich berechnen mit dem Term $(a - b) \cdot (c + d)$.
c) Die blaue Fläche in Fig. 1 lässt sich berechnen mit dem Term $a \cdot (d + c) - bd - bc$.
d) $(3 - x)^2 = 9 - x^2$
e) $a^2 - a = a$
f) $x \cdot 4x + 5x = x \cdot 9x = 9x^2$
g) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$
h) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
i) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Gleichungen

2 a) $0{,}5 + (2 - x) = 1 - (1 + x)$ besitzt die Lösung $x = -2$.
b) Die Lösung y der Gleichung $4 \cdot (y + 5) = 9y + 5$ ist ein Teiler von 15.
c) Die Lösung x von $x - (x - 7) \cdot (x + 7) = 50 - x^2$ ist eine einstellige Quadratzahl.
d) Die Gleichung $(8 - z) \cdot (2 + z) = (7 - z) \cdot (z + 1)$ besitzt keine Lösung.
e) Die Aussage „An unserer Schule gibt es 15-mal so viele Schüler wie Lehrer" kann durch die Gleichung $15 \cdot S = L$ ausgedrückt werden (S = Anzahl der Schüler, L = Anzahl der Lehrer).
f) Wird eine Gleichung, die genau eine Lösung besitzt, auf beiden Seiten mit 4 multipliziert, vervierfacht sich ebenfalls die Lösung der Gleichung.

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

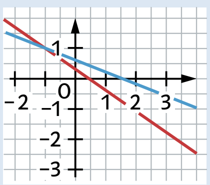


Fig. 2

3 a) Das LGS mit $2x - 3y = 23$ und $-2x = y + 13$ hat die Lösung $x = -2$ und $y = 9$.
b) Wenn zwei Geraden eine unterschiedliche Steigung haben, dann besitzt das LGS aus ihren beiden Gleichungen genau eine Lösung.
c) Die Summe der Lösungen x und y des LGS mit $2y = 6 - 5x$ und $2x = 9 - 3y$ ist 3.
d) Die Geraden in Fig. 2 veranschaulichen das LGS mit $7x + 10y = 3$ und $2x + 5y = 3$.
e) Ein LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten hat entweder genau eine oder unendlich viele Lösungen.
f) Man sieht, ohne zu rechnen, dass das LGS mit $y = 3x - 5$ und $y = -2x - 5$ als einzige Lösung $x = 0$ und $y = -5$ besitzt.
g) Ein LGS mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten kann auch genau zwei Lösungen besitzen, da drei Geraden sich ja auch genau zweimal schneiden können.

Zahlenbereiche

4 a) Eine Dezimalzahl, die unendlich viele Nachkommastellen hat, ist immer irrational.
b) Ein Bruch, bei dem der Nenner ein Teiler des Zählers ist, ist immer eine ganze Zahl.
c) Das Produkt von 789 negativen Zahlen ist immer negativ.
d) Das Produkt von zwei echten Brüchen ist immer ein echter Bruch.
e) Das Produkt von drei irrationalen Zahlen ist immer irrational.

Funktionen

Prozent- und Zinsrechnung

5 a) $\frac{5}{8} = 62{,}5\,\%$
b) 7% von 12 700 Menschen sind 889 Menschen.
c) Eine um 30 % reduzierte Hose, die jetzt 49 € kostet, hat zuvor 69 € gekostet.
d) Wenn ein MP3-Player inklusive 19 % Mehrwertsteuer 84,49 € kostet, dann kostet er ohne Mehrwertsteuer 68,44 €.
e) Legt man 4500 € für vier Monate zu einem Zinssatz von 3 % an, so erhält man nach den vier Monaten 4635 € ausgezahlt.
f) Max behauptet: „Wenn die Bank A 2 % und die Bank B 4 % Zinsen pro Jahr zahlt, bekommt man nach zehn Jahren für x Euro bei der Bank B doppelt so viele Zinsen ausgezahlt wie bei der Bank A.“

Zuordnungen

6 a) Wenn drei Liter Milch 1,77 € kosten, dann kosten fünf Liter Milch 2,95 €.
b) Wenn fünf Musiker zum Spielen eines Stückes zwölf Minuten brauchen, dann brauchen 15 Musiker zum Spielen dieses Stückes nur vier Minuten.
c) Wenn ein Heuvorrat für zwölf Pferde sechs Tage reicht, dann reicht er für acht Pferde zehn Tage.
d) Die Zuordnung *„Dicke eines Buches“* → *„Preis eines Buches“* ist proportional.
e) Jede Gerade ist der Graph einer proportionalen Zuordnung.
f) Die Gleichung $y = \frac{x}{3}$ gehört zu einer antiproportionalen Zuordnung, deren Graph in Fig. 1 dargestellt ist.

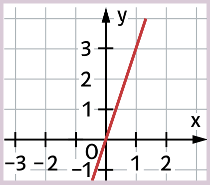


Fig. 1

Geraden

7 a) Der Punkt $(4\,|\,3)$ liegt auf der Geraden mit der Gleichung $y = 3x - 5$.
b) Die Gerade in Fig. 2 besitzt die Gleichung $y = 0{,}6x + 1$.
c) Die Gerade durch die Punkte $S(3\,|\,-1)$ und $T(2\,|\,-5)$ besitzt die Gleichung $y = -6x + 17$.
d) Die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ verläuft parallel zur y-Achse.
e) Die Gerade mit $y = 3x + 5$ verläuft steiler als die Gerade mit $y = 2x + 7$.
f) Jede lineare Funktion schneidet genau einmal die x-Achse und einmal die y-Achse.
g) Die Geraden g und h mit $g\colon y = 4x - 6$ und $h\colon y = 4x - 5$ schneiden sich in $S(4\,|\,-1)$.

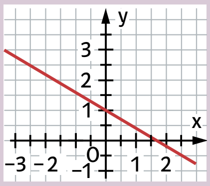


Fig. 2

Geometrie

Winkelbeziehungen

8 a) Beträgt einer von zwei Nebenwinkeln bei zwei sich schneidenden Geraden 90°, so schneiden sich die beiden Geraden im rechten Winkel.
b) Kennt man in einem Parallelogramm zwei Winkel, so lassen sich die anderen beiden berechnen.
c) Es gibt ein Viereck mit drei rechten Winkeln, welches kein Rechteck ist.
d) Wenn ein Winkel viermal so groß ist wie sein Nebenwinkel, dann beträgt der Nebenwinkel 36°.

Dreiecke

9 a) Kennt man zwei Innenwinkel eines Dreiecks, lässt sich der dritte berechnen.
b) Kennt man die drei Winkel eines Dreiecks, lässt es sich eindeutig konstruieren.
c) Ein Dreieck mit $a = 3\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ und $\gamma = 35°$ lässt sich eindeutig konstruieren.
d) Ein Dreieck mit $a = 5\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ und $c = 13\,\text{cm}$ lässt sich eindeutig konstruieren.
e) Es gibt keine gleichseitigen rechtwinkligen Dreiecke.
f) Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten liegt immer innerhalb des Dreiecks.
g) Ist die längste Seite eines Dreiecks Durchmesser seines Umkreises, so benötigt man einen an diese Seite angrenzenden Innenwinkel, um die anderen berechnen zu können.

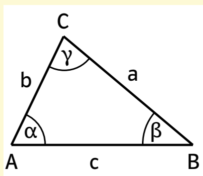


Fig. 3

Vierecke

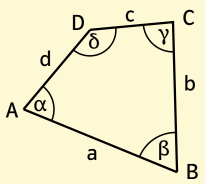


Fig. 1

10 a) Ein Viereck mit $a = 3\,cm$, $b = 5\,cm$, $\gamma = 65°$ und $\delta = 100°$ lässt sich eindeutig konstruieren.
b) Ein gleichschenkliges Trapez mit a parallel zu c und $a = 6\,cm$, $c = 3{,}5\,cm$ und mit der zu a gehörigen Höhe $h_a = 2\,cm$ lässt sich eindeutig konstruieren.
c) Jedes Rechteck ist ein Trapez.
d) Jedes Parallelogramm ist eine Raute.
e) Jedes achsensymmetrische Viereck ist ein gleichschenkliges Trapez.

Flächeninhalte

11 a) Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen $a = 3\,cm$, $b = 5\,cm$ und $c = 6\,cm$ besitzt einen Flächeninhalt von $15\,cm^2$.
b) Ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm besitzt einen größeren Flächeninhalt als ein Trapez mit den parallelen Seiten $a = 7\,cm$, $c = 3\,cm$ und der Höhe $h = 5\,cm$.
c) Ein Parallelogramm mit den Seiten $a = 2\,cm$ und $b = 5\,cm$, das kein Rechteck ist, besitzt den Flächeninhalt $10\,cm^2$.
d) Stimmen in zwei Vierecken alle vier Seiten überein, so sind ihre Flächeninhalte gleich.
e) Ein Kreis mit dem Radius $r = 3\,cm$ besitzt einen Flächeninhalt von etwa $28{,}3\,cm^2$.
f) Verdoppelt sich der Radius eines Kreises, verdoppelt sich auch sein Flächeninhalt.

Körper

Fig. 2

12 a) Ein Prisma mit Grundfläche $12\,cm^2$ und Höhe 3 cm besitzt ein Volumen von $36\,m^3$.
b) Die Schokoladenverpackung in Fig. 2 ist ein Prisma.
c) Ein Zylinder mit dem Radius $r = 5\,cm$ und der Höhe $h = 2\,cm$ besitzt ein Volumen von etwa $137{,}1\,cm^3$.
d) Verdoppelt man die Seitenlängen eines Würfels, verachtfacht sich sein Volumen.
e) Wenn man eine 1-Liter-Milchverpackung würfelförmig machen will, dann müsste jede Seite 10 cm lang sein.
f) Ein Körper mit vier Flächen kann kein Prisma sein.

Daten und Zufall

Wahrscheinlichkeiten

Fig. 3

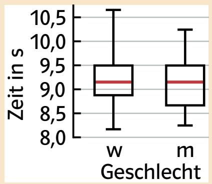
13 a) Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine gerade Zahl zu würfeln, ist 0,5.
b) Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Quader (Fig. 3) eine gerade Zahl zu würfeln, ist 0,5.
c) Die Wahrscheinlichkeit, in zwei Münzwürfen zweimal „Zahl“ zu werfen, ist genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, in zwei Münzwürfeln einmal „Zahl“ und einmal „Wappen“ zu werfen.
d) Das Gegenereignis zu „eine Zahl kleiner als drei würfeln“ ist das Ereignis „eine Zahl größer als drei würfeln“.
e) Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten sind das Gleiche, beide werden in Prozent angegeben.
f) Die Wahrscheinlichkeit für „dreimal hintereinander eine 5 würfeln“ ist genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit für „in drei Würfen die Summe 15 würfeln“.

Statistik

14 a) Der Median der Datenreihe 2, 8, 5, 3, 2, 6, 7, 4, 5 ist 4.
b) Das arithmetische Mittel der Datenreihe 2, 8, 5, 3, 2, 6, 7, 4, 5 ist $\frac{26}{6}$.
c) Wird von 200 Würfen 34-mal die „6“ gewürfelt, beträgt ihre relative Häufigkeit 34 %.
d) Hat eine Datenreihe nur gleiche Werte, so ist ihr Mittelwert gleich diesem Wert.
e) Zu den Wahlergebnissen einer Bundestagswahl lässt sich weder der Median noch das arithmetische Mittel bestimmen.
f) Ist das arithmetische Mittel einer Datenreihe aus fünf Daten 3, so muss die Summe aller Daten 15 sein.

15 Lies aus dem Boxplot ab, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
a) Das langsamste Mädchen ist langsamer als jeder Junge.
b) 50 % der Jungen laufen zwischen 8,6 und 9,5 Sekunden.
c) Bei den Mädchen laufen vermutlich mehr als 50 % zwischen 8,6 und 9,5 Sekunden.
d) Die beste Zeit aus dem Jahrgang ist ein Mädchen gelaufen.
e) Der langsamste Junge lief über 10 Sekunden.
f) Die besten 25 % der Jungen liefen schneller als 8,6 Sekunden.

Diagramme



Boxplot zu den Sprintergebnissen über 50 m.

Auswertung und Selbsteinschätzung

Vergleiche deine Ergebnisse mit den Lösungen und Begründungen auf den Seiten 251 und folgende. Jetzt weißt du, wie viele Fragen du richtig beantwortet und begründet hast, und kannst einschätzen, wie sicher du in den verschiedenen Gebieten der Mathematik bist. Notiere in deinem Heft die folgenden Aussagen und beurteile deine Fähigkeiten zu den genannten Inhalten mithilfe der Noten von 1 bis 6. Eine „1“ heißt, dass du den aufgeführten Inhalt sehr gut beherrschst, und eine „6“, dass du ihn gar nicht beherrschst.

Rechnen mit Zahlen und Variablen

1. Ich kann Terme mit Variablen aufstellen und sicher umformen.
2. Ich kann Flächen verschiedenen Termen zuordnen.
3. Ich kann Wurzelterme sicher vereinfachen.
4. Ich beherrsche die Prozent- und Zinsrechnung sicher.

Funktionen

5. Ich kann proportionale und antiproportionale Zuordnungen in Form einer Wertetabelle, eines Graphen oder einer Gleichung darstellen.
6. Ich kann Aufgaben mit dem Dreisatz sicher lösen.
7. Ich kann Funktionsgleichungen aufstellen und zugehörige Graphen zeichnen.
8. Ich kann Gleichungen und lineare Gleichungssysteme sicher lösen.

Geometrie

9. Ich kann fehlende Winkel in geometrischen Figuren sicher bestimmen.
10. Ich kann Planskizzen anfertigen und Dreiecke und Vierecke exakt konstruieren.
11. Ich kenne alle wichtigen Eigenschaften von Dreiecken und besonderen Vierecken.
12. Ich kann Flächen und Volumina berechnen.

Stochastik

13. Ich kann Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten sicher berechnen.
14. Ich kenne den Unterschied zwischen Median und Mittelwert und kann beides bestimmen.
15. Ich kann Kreisdiagramme, Säulendiagramme und Boxplots zeichnen und interpretieren.

Du kannst dir natürlich noch eigene Aussagen zur Selbsteinschätzung überlegen. Diese Aussagen sollen nur eine Anregung sein.

Jetzt kannst du mit dem Üben beginnen. Auf den Seiten 172 und 173 findest du Vorschläge, wie du dabei vorgehen kannst. Begleite deine Übungsphasen am besten mit einem Lernprotokoll. Die folgende Tabelle bietet dir eine Hilfestellung, wie du ohne viel Aufwand ein solches Lernprotokoll führen kannst, welches deinen Lernprozess begleitet und unterstützt.

Üben – aber wie? Hole dir Hilfen und Anregungen auf den Seiten 172 und 173.

Mein Lernprotokoll

Thema	Aufgabe	alleine bearbeitet (j/n)	richtig/ falsch	Was fand ich an der Aufgabe schwierig?	Muss ich derartige Aufgaben noch mehr üben?

1 Arithmetik und Algebra

In der Arithmetik und Algebra geht es um das Rechnen mit Zahlen und Variablen. Auch das Aufstellen, Umformen und Lösen von Gleichungen sowie linearen Gleichungssystemen ist ein wichtiger Bestandteil der Algebra.

Zahlenbereiche

Natürliche Zahlen ($\mathbb{N}$): 1, 2, 3, 4, 5, …
Ganze Zahlen ($\mathbb{Z}$): … −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; …
Rationale Zahlen ($\mathbb{Q}$): Alle Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen. (Jede endliche und jede periodische Dezimalzahl lässt sich ebenfalls als Bruch darstellen.)
Irrationale Zahlen: Zahlen wie $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$, die sich nicht als Bruch schreiben lassen. Man kann diese Zahlen nur näherungsweise und nicht exakt als Dezimalzahlen angeben, denn die zugehörigen Dezimalzahlen haben unendlich viele Nachkommastellen und sind nicht periodisch.
Reelle Zahlen ($\mathbb{R}$): Alle rationalen und irrationalen Zahlen.

Wurzeln

Die Schreibweise $\sqrt{2}$; $\sqrt{3{,}5}$; $\sqrt{4}$ usw. meint jeweils diejenige positive Zahl, deren Quadrat 2; 3,5; 4 usw. ergibt. Zu $\sqrt{2}$ sagt man **Quadratwurzel aus 2** oder einfach **Wurzel aus 2**. Viele Wurzeln sind irrationale Zahlen und lassen sich daher als Dezimalzahl nicht exakt angeben.

Beispiele $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$; $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7}$; $\sqrt{23^2} = 23$; $\sqrt{x^2} = x$ (für $x > 0$); $\sqrt{5} = 2{,}23606797\ldots$

Rechengesetze

Kommutativgesetze (Vertauschungsgesetze):
Für zwei Zahlen a und b gilt: $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetze (Verbindungsgesetze):
Für drei Zahlen a, b und c gilt: $(a + b) + c = a + (b + c)$ und $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributivgesetze (Verteilungsgesetze):
Für vier Zahlen a, b, c und d gilt: $a \cdot (b + c) = ab + ac$ und $a \cdot (b - c) = ab - ac$
bzw. $(a + b) \cdot (c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$

„Vorfahrtsregeln"

In Termen müssen Klammern zuerst berechnet werden, und zwar die innere vor der äußeren. Außerdem gilt: Punktrechnung vor Strichrechnung.

Beispiele a) $-x \cdot \left(-9x^2 + (2x)^2\right)$
$= -x \cdot (-9x^2 + 4x^2)$
$= -x \cdot (-5x^2) = 5x^3$

b) $(2a + 3) \cdot (4a - 7) - 8a^2$
$= 8a^2 - 14a + 12a - 21 - 8a^2$
$= -2a - 21$

binomische Formeln

Es gelten drei binomische Formeln:
1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 3. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Beispiele a) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$
b) $(s + 2t) \cdot (s - 2t) = s^2 - 4t^2$
c) $(a - 4b)^2 = a^2 - 8ab + 16b^2$
d) $x^2 + 10xy + 25y^2 = (x + 5y)^2$

Rechnen mit Wurzeln

Für $a, b \geq 0$ gilt:
a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ b) $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$ c) $\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{b}$

Beispiele
a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ b) $\sqrt{27} : \sqrt{3} = \sqrt{27 : 3} = \sqrt{9} = 3$ c) $\sqrt{200} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

Zur Berechnung der Lösung einer Gleichung mit einer Variablen muss die Gleichung mittels der für Terme und Gleichungen geltenden Regeln nach dieser Variablen aufgelöst werden, sodass sie nach der Umformung alleine auf einer Seite des Gleichheitszeichens steht.

Gleichungen

Beispiel
$8x - 2(x - 1) = 8 + 3x$
$8x - 2x + 2 = 8 + 3x$
$6x + 2 = 8 + 3x \quad | -3x$
$3x + 2 = 8 \quad | -2$
$3x = 6 \quad | :3$
$x = 2$

Zur Probe $x = 2$ in die Ausgangsgleichung einsetzen: $8 \cdot 2 - 2(2 - 1) = 8 + 3 \cdot 2$
$16 - 2 \cdot 1 = 8 + 6$
$14 = 14$
$14 = 14$ ist eine wahre Aussage, also ist $x = 2$ die Lösung der Gleichung.

Zur Kontrolle der Ergebnisse kann man die Lösung in die erste Zeile einsetzen. Wenn eine wahre Aussage rauskommt, ist das Ergebnis richtig.

Zum Lösen von linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen gibt es drei Verfahren: das **Gleichsetzungsverfahren**, das **Einsetzungsverfahren** und das **Additionsverfahren**.

Lineare Gleichungssysteme (LGS) mit zwei Variablen

Beispiele

Gleichsetzungsverfahren
I: $y = 5x + 2$ und
II: $y = x - 6$
I und II gleichsetzen:
$5x + 2 = x - 6 \quad | -x$
$4x + 2 = -6 \quad | -2$
$4x = -8 \quad | :4$
$x = -2$
$x = -2$ in I (oder II) einsetzen:
$y = 5 \cdot (-2) + 2 = -8$
$(-2|-8)$ ist die Lösung des LGS.

Einsetzungsverfahren
I: $y = -3x + 1$ und
II: $3x - 2y = 25$
I in II einsetzen:
$3x - 2(-3x + 1) = 25$
$3x + 6x - 2 = 25 \quad | +2$
$9x = 27 \quad | :9$
$x = 3$
$x = 3$ in I einsetzen:
$y = -3 \cdot (3) + 1 = -8$
$(3|-8)$ ist die Lösung des LGS.

Additionsverfahren
I: $4x + 2y = 8$ und
II: $6x - 2y = 2$
I und II addieren:
$10x = 10 \quad | :10$
$x = 1$
$x = 1$ in I (oder II) einsetzen:
$4 \cdot 1 + 2y = 8$
$y = 2$
$(1|2)$ ist die Lösung des LGS.

Aufgaben

1 Setze Klammern so, dass das Ergebnis stimmt.
a) $-28 - 21 : 7 = -1$ b) $3 \cdot 5 + 9 \cdot (-2) = -48$ c) $(-2) \cdot 14 - 4 \cdot 5 = -100$

2 Die blaue Fläche in Fig. 1 lässt sich auf verschiedene Weisen berechnen.
a) Elisa gibt für die Berechnung der blauen Fläche den folgenden Term an:
$(x - b)(y - a) + a(x - b) + b(y - a)$.
Zeichne die Fig. 1 als Skizze in dein Heft und teile die blaue Fläche entsprechend Elisas Term ein. Erkläre in Worten, wie Elisa auf diesen Term kommt.
b) Finde zwei weitere Terme, mit denen sich die blaue Fläche berechnen lässt.
c) Zeige durch eine Rechnung, dass Elisas und deine beiden Terme äquivalent sind.

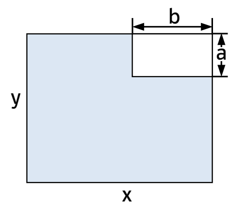


Fig. 1

3 Welche Zahlen kannst du für a und b einsetzen, sodass die Rechnung stimmt? Finde jeweils mindestens zwei Möglichkeiten.
a) $a : b = 3$ b) $a \cdot b = 3$ c) $\frac{-a^2}{b} = 3$ d) $\sqrt{3 \cdot a} = b$ e) $3\sqrt{a} = b$ f) $\sqrt{a^2 \cdot b} = 3$

4 Fabian behauptet: „Ich habe alle Rekorde gebrochen. In zwei Stunden habe ich 15 202 Purzelbäume geschlagen." Elisabeth glaubt ihm nicht. Kann Fabians Behauptung stimmen? Begründe durch Rechnung.

5 Phillip arbeitet in einer Fahrradwerkstatt und ist dafür zuständig, die Rechnungen für die Kunden in Excel zu schreiben. Eine unvollständige Rechnung ist in Fig. 1 abgebildet.

	A	B	C	D
1	**Rechnung Nr. 9876**		**Datum: 23.11.2007**	
3	Artikel	Menge	Einzelpreis (€)	Gesamtpreis (€)
4	Schutzblech	2	5,99	11,98
5	Bremsschuh	4	4,58	
6	Pedale	2		32,98
7	Kette	1	29,95	29,95
8	Gepäckträger	1	31,95	31,95
9		Zwischensumme		
10		MwSt. (%)	19	
12		**Rechnungsbetrag**		**148,96**

Fig. 1

	A	B	C	D
1	**Rechnung Nr. 9876**		**Datum: 23.11.2007**	
3	Artikel	Menge	Einzelpreis (€)	Gesamtpreis (€)
4	Schutzblech	2	5,99	= B4*C4
5	Bremsschuh	4	4,58	
6	Pedale	2	16,49	
7	Kette	1	29,95	= B7*C7
8	Gepäckträger	1	31,95	
9		Zwischensumme		
10		MwSt. (%)	19	
12		**Rechnungsbetrag**		

Fig. 2

a) Berechne die fehlenden Werte in der Tabelle (Fig. 1). Schreibe z. B.: D5 = …
b) Phillip berechnet die Werte in Spalte D mithilfe von Excel. In Fig. 2 siehst du zwei seiner Eingaben. Ergänze mögliche Formeln zur Berechnung der fehlenden Beträge in Fig. 2 und kontrolliere mit dem Taschenrechner, ob deine Formel stimmen kann.

6 Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe.
a) Jede natürliche Zahl lässt sich als Bruch schreiben.
b) Subtrahiert man zwei natürliche Zahlen, erhält man immer eine natürliche Zahl.
c) Multipliziert man zwei irrationale Zahlen, erhält man immer eine irrationale Zahl.
d) Da Wurzeln immer positiv sind, gibt es keine negativen irrationalen Zahlen.
e) Es gibt irrationale Zahlen, deren 1000-Faches eine rationale Zahl ist.
f) Addiert man fünf aufeinander folgende natürliche Zahlen miteinander, ist das Ergebnis immer ein Vielfaches der Zahl 5.

7 Auf dem Foto (Fig. 3) siehst du etwa $\frac{1}{40}$ der Besucher eines Konzertes von Herbert Grönemeyer. Schätze die Anzahl der Konzertbesucher. Erläutere dein Vorgehen.

Fig. 3

8 Vereinfache so weit wie möglich.
a) $3x \cdot 4y + 2x(5 - y)$
b) $4(3a - 7b) - 7(4b - 3a) + 3\,(7a - 4b)$
c) $72xy - 2(4y - (7y - 6x)) \cdot (-12x)$
d) $4x\left(x - x^2 + (3x)^3\right) - (5x - 4) \cdot (5x + 4)$
e) Überprüfe deine Ergebnisse.

Hinweis:
Zum Überprüfen musst du für jede Variable eine Zahl in die Aufgabe und in dein Ergebnis einsetzen.
Es muss jeweils das Gleiche herauskommen.

9 Robert hat Terme aufgestellt, bei denen 1, 2, 6 und 12 herauskommt.
a) Welcher Term gehört zu welchem Wert? Jeder untersucht ohne Taschenrechner zwei Terme und stellt seinem Tischnachbarn die Rechnungen vor.
b) Konstruiert selbst einen komplizierten Term mit einem einfachen Ergebnis und notiert den Term und das Ergebnis auf zwei Seiten eines Kärtchens. Nutzt die Kärtchen als Übungsmaterial.

ii) $\dfrac{2\sqrt{6} + \sqrt{24} - \sqrt{54}}{\sqrt{6}}$

i) $\dfrac{3\sqrt{48} + 6\sqrt{108}}{2\sqrt{12}}$

iv) $\dfrac{\sqrt{16}\left(\sqrt{27} + \sqrt{18}\right)}{2\sqrt{2} + \sqrt{12}}$

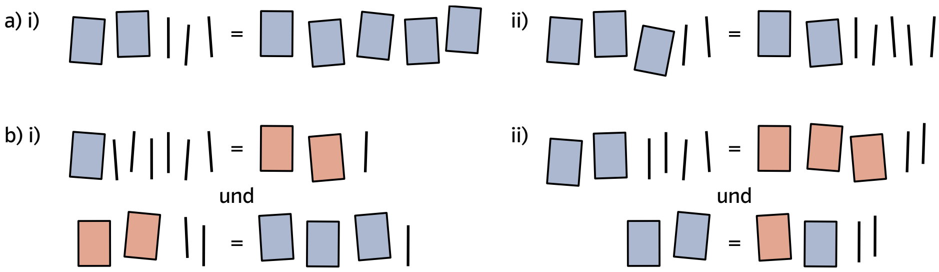
iii) $\dfrac{\sqrt{108} - 2\sqrt{48} + 2\sqrt{75}}{2\sqrt{12}}$

10 Denke dir eine beliebige Zahl. Verdopple diese Zahl und addiere anschließend 7. Multipliziere das Ergebnis mit 3 und addiere anschließend 3. Multipliziere das Ergebnis erneut mit 3 und subtrahiere vom Ergebnis die Summe aus deiner anfangs gedachten Zahl und 4. Teile das Ergebnis durch 17 und subtrahiere erneut deine anfangs gedachte Zahl.
a) Führe die Anweisungen für drei verschiedene Zahlen durch. Was fällt auf?
b) Schreibe für deine anfangs gedachte Zahl die Variable x und stelle einen Term auf, der zu den Anweisungen passt.
c) Vereinfache den Term aus b) so weit wie möglich und begründe die Entdeckung aus a).
d) Denke dir selbst ein ähnliches Rätsel aus und lasse es von deinem Nachbarn lösen.

Pollys Tipp:

Tipp: Achte auf die richtige Klammersetzung. Setze nach jedem Schritt eine Klammer um das „neue" Ergebnis.

11 Finde heraus, wie viele Hölzchen in den blauen bzw. roten Boxen sind, sodass auf beiden Seiten einer Gleichung gleich viele Hölzchen liegen. Achte darauf, dass in jeder blauen bzw. roten Box innerhalb einer Aufgabe gleich viele Hölzchen liegen müssen.



12 Eine vierköpfige Familie ist zusammen 127 Jahre alt. Das ältere Kind ist halb so alt wie die Mutter. Die Mutter ist drei Jahre jünger als der Vater. Das jüngere Kind ist zwei Jahre jünger als das ältere. Wie alt sind die Familienmitglieder?

13 Frau Klein hat typische Fehler der Klassenarbeit aufgeschrieben. Finde und korrigiere sie. Führe nach deiner Korrektur jeweils die Probe durch.

a)
$$\begin{aligned} 18x + 6 &= 14x - 4 && \mid -14x \\ 4x + 6 &= -4 && \mid -6 \\ 4x &= -10 && \mid -4 \\ x &= -14 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 9(3 + 2x) &= -1 \\ 27 + 2x &= -1 && \mid -27 \\ 2x &= 26 && \mid :2 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} (x + 4)^2 + (x - 6)^2 &= 2x^2 + x \\ x^2 + 16 + x^2 - 36 &= 2x^2 + x \\ 2x^2 - 20 &= 2x^2 + x && \mid -2x^2 \\ -20 &= x \end{aligned}$$

14 Die Seitenlängen eines Rechtecks unterscheiden sich um 2 cm. Verkürzt man die kürzere Seite um 5 cm und verlängert gleichzeitig die längere Seite um 3 cm, so wird der Flächeninhalt um 55 cm² kleiner. Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Rechtecks?

15 Gegeben sind die Gleichungen I. $4x = y$ und II. $6\left(x - \frac{1}{6}\right) = y$.
a) Löse das lineare Gleichungssystem rechnerisch.
b) Zeichne die Geraden zu I und II in ein Koordinatensystem und überprüfe deine Lösung aus a) zeichnerisch.
c) x soll der Zeit in Stunden und y der zurückgelegten Strecke beim Wandern in Kilometern entsprechen. Erfinde eine zu den Gleichungen passende Aufgabe.
d) Was bedeutet die in a) berechnete Lösung im Sachzusammenhang der Aufgabe aus c)?

16 Gib je ein LGS mit zwei Variablen an, das die angegebene Lösung hat.
a) (1 | 2) b) (0 | −4) c) (5 | −6) d) (−3 | −1)

2 Funktionen

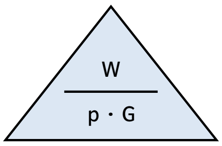
Zuordnungen oder Funktionen beschreiben Zusammenhänge von Größen mithilfe von Tabellen, Graphen und Gleichungen. Dabei werden die Zuordnungen bzw. Funktionen oft zum Modellieren, also zum Beschreiben der Wirklichkeit, eingesetzt.

Prozentrechnung

Der Ausdruck 23 % ist eine andere Schreibweise für $\frac{23}{100}$ oder 0,23.

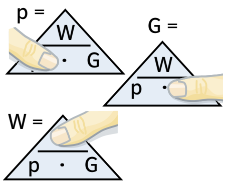
Für den **Prozentsatz** gilt: Prozentsatz $p = \frac{\text{Prozentwert } W}{\text{Grundwert } G}$ oder kurz $p = \frac{W}{G}$.

Beispiel
Von 25 Schülern (Grundwert G) haben 7 Schüler (Prozentwert W) eine Drei in der Mathearbeit. Das sind $p = \frac{7}{25} = \frac{28}{100} = 0{,}28 = 28\,\%$ der Schüler.



Bauernregel:
Durch Abdecken der gesuchten Größe lässt sich dem Dreieck die nötige Formel entnehmen.

Um W oder G zu bestimmen, löst man die Formel für p nach der gesuchten Größe auf:

Formel		Bauernregeln	Beispiel	
$p = \frac{W}{G}$	$\mid \cdot G$		$0{,}28 = \frac{7}{25}$	$\mid \cdot 25$
$W = p \cdot G$	$\mid : p$		$7 = 0{,}28 \cdot 25$	$\mid : 0{,}28$
$G = \frac{W}{p}$			$25 = \frac{7}{0{,}28}$	

Zinsrechnung

Jahreszins: Wenn man ein Guthaben G für ein Jahr zu einem Zinssatz p bei der Bank anlegt, erhält man nach Ablauf des Jahres $G \cdot p$ Zinsen.
Tageszins: Legt man das Guthaben G nicht für das ganze Kalenderjahr, sondern nur für t Tage an, so erhält man nur $\frac{t}{360} \cdot G \cdot p$ Zinsen.
Zinseszins: Liegt ein Guthaben G für x Jahre zu einem Zinssatz p auf der Bank, so kann man das Kapital K nach x Jahren so berechnen: $K = (1 + p)^x \cdot G$

Beispiel
Tim legt 2300 € zu einem Zinssatz von 3 % an. Legt er sein Geld ein Jahr an, erhält er $2300\,€ \cdot 0{,}03 = 69\,€$ Zinsen. Legt er es 5 Monate an, erhält er $\left(\frac{150}{360}\right) \cdot 69\,€ = 28{,}75\,€$. Legt er es vier Jahre an, hat er ein Kapital von $(1 + 0{,}03)^4 \cdot 2300\,€ \approx 2588{,}67\,€$.

proportionale Zuordnung
Jede proportionale Zuordnung ist eine spezielle lineare Funktion.

Bei einer proportionalen Zuordnung $x \to y$ gehört zum 2-; 3- bzw. n-Fachen der Größe x auch das 2-; 3- bzw. n-Fache der Größe y. Der y-Wert lässt sich mit einer Gleichung der Form $y = m \cdot x$ berechnen. Der Graph einer proportionalen Zuordnung ist eine Gerade, die immer durch den Punkt (0 | 0) verläuft.

Ursprungsgerade

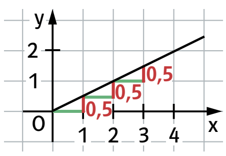


Fig. 1

Beispiel
Durch die Tabelle in Fig. 2 wird eine proportionale Zuordnung beschrieben.
Die Zuordnungsvorschrift lautet $y = 0{,}5 \cdot x$.
Der Graph ist in Fig. 1 dargestellt.

X	1	2	3	5	7	10
Y	0,5	1	1,5	2,5	3,5	5

Fig. 2

antiproportionale Zuordnung

Bei einer antiproportionalen Zuordnung $x \to y$ gehört zum 2-; 3-; bzw. n-Fachen der Größe x der 2-te; 3-te; bzw. n-te Teil der Größe y. Der y-Wert lässt sich mit einer Gleichung der Form $y = \frac{a}{x}$ berechnen. Der Graph einer antiproportionalen Zuordnung ist eine Hyperbel.

Beispiel
Durch die Tabelle in Fig. 1 wird eine antiproportionale Zuordnung beschrieben. Die Zuordnungsvorschrift lautet $y = \frac{4}{x}$.
Der Graph ist in Fig. 2 dargestellt.

· 2 · 5

X	0,4	0,5	1	2	4	5
Y	10	8	4	2	1	0,8

:2 :5

Achtung! Hier teilen!

Fig. 1

Jede antiproportionale Zuordnung ist eine spezielle Funktion.

Hyperbel

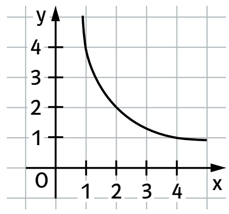


Fig. 3

Bei einer proportionalen sowie bei einer antiproportionalen Zuordnung lassen sich gesuchte Werte mit dem Dreisatz bestimmen:

Beispiel (proportional)
1200 l Heizöl kosten 600 €. Mit dem Dreisatz lässt sich berechnen, wie viel 1700 l Heizöl kosten:

Heizölmenge in l	Preis in €
: 1200 → 1200	600 → : 1200
· 1700 → 1	0,5 → · 1700
1700	850

Beispiel (antiproportional)
Eine Packung Vogelfutter reicht für drei Vögel 15 Tage. Mit dem Dreisatz lässt sich berechnen, wie viele Tage die Packung für fünf Vögel reicht:

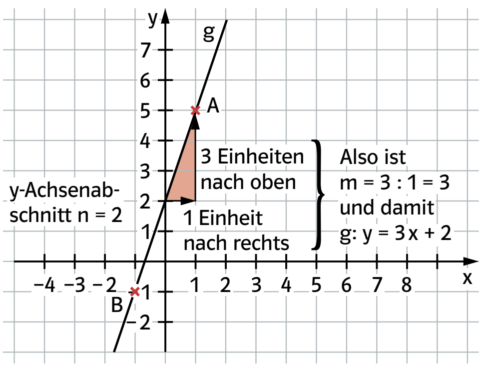
Anzahl der Vögel	Anzahl der Tage
: 3 → 3	15 → · 3
· 5 → 1	45 → : 5
5	9

Achtung! *Auf der einen Seite wird multipliziert und auf der anderen dividiert!*

Lineare Funktionen

Zuordnungen $x \to y$, bei denen man zur Berechnung des y-Wertes eine Gleichung der Form $y = m \cdot x + n$ aufstellen kann, heißen **lineare Funktionen**.
Der Graph schneidet die y-Achse in $S(0\,|\,n)$, wobei n y-Achsenabschnitt genannt wird. Die Steigung m gibt an, um wie viel der y-Wert steigt bzw. fällt, wenn x um 1 zunimmt.

Beispiel
Die Gerade g geht durch die Punkte $A(1\,|\,5)$ und $B(-1\,|\,-1)$. Die Steigung m von g lässt sich berechnen mit:
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-5}{-1-1} = \frac{-6}{-2} = 3$$
Durch das Einsetzen von $m = 3$ und den Koordinaten eines Punktes, z. B. $A(1\,|\,5)$ in $y = m \cdot x + n$, lässt sich n berechnen:
$5 = 3 \cdot 1 + n \;|-3$
$n = 2$
Die Funktionsgleichung von g ist also:
$y = 3x + 2$.



Aufgaben

1 20 % aller Nordrhein-Westfalen waren noch nie in den Niederlanden. Welche von den folgenden Aussagen bedeutet das Gleiche? Kommentiere deine Antwort.
(I) Jeder zwanzigste Nordrhein-Westfale war noch nie in den Niederlanden.
(II) 20 Nordrhein-Westfalen waren noch nie in den Niederlanden.
(III) Von 15 Nordrhein-Westfalen waren durchschnittlich drei noch nie in den Niederlanden.
(IV) Von zwanzig Nordrhein-Westfalen war durchschnittlich einer noch nie in den Niederlanden.
(V) Jeder fünfte Nordrhein-Westfale war noch nie in den Niederlanden.

2 Antonia erzählt Helene: „Ich habe für meine neuen Schuhe nur noch 39 € bezahlt und habe dabei 40 % gespart." Helene erwidert: „Meine neuen Schuhe haben ursprünglich 60 € gekostet und ich habe nur noch 33 € für sie bezahlt, also wurden meine Schuhe noch stärker reduziert als deine."
a) Wie viel Euro haben Antonias neue Schuhe vor dem Preisnachlass gekostet?
b) Um wie viel Prozent wurden Helenes neue Schuhe reduziert?
c) Wer von den beiden hat ein größeres „Schnäppchen" gemacht?

Bank A:
– 3,5 % Zinsen in den ersten beiden Jahren – ab dem dritten Jahr 4,5 % Zinsen

Bank B:
– 4 % Zinsen – bei Anlagezeiten unter einem Jahr werden 10 € Bearbeitungsgebühr erhoben

3 Marc möchte 2700 € anlegen. Er hat zwei Angebote zur Auswahl (Bank A und B, siehe Randspalte).
a) Für welches Angebot sollte er sich entscheiden, wenn er das Geld genau ein Jahr anlegen möchte und wie viele Zinsen erhält er dann?
b) Welches Angebot ist lukrativer, wenn er sein Geld nur sieben Monate anlegen möchte?
c) Bei welcher Bank hat er nach fünf Jahren mehr Geld auf dem Konto und wie viel?
d) Wie viele Jahre müsste er sein Geld mindestens anlegen, damit sich die Anlage bei Bank A lohnt?
e) Jonas erhält nach 5 Monaten bei Bank A 42 € Zinsen. Wie viel Geld hatte er angelegt?

Strecke in km	Verbrauch in Litern
80	6,4
150	12
180	14,4
260	20,8

Fig. 1

4 Das Auto von Herrn Huber verbraucht durchschnittlich 8 Liter Benzin auf 100 km. Das Auto von Herrn Schreiber verbraucht nur 7 Liter auf 100 km, das von Frau Krause 9 Liter auf 100 km. Der Graph und die Tabelle stellen den durchschnittlichen Benzinverbrauch eines dieser Autos dar.

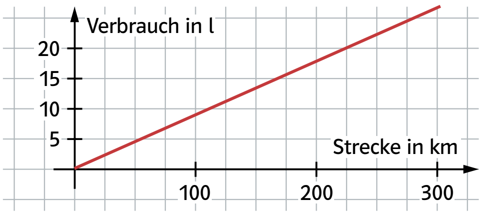


Fig. 2

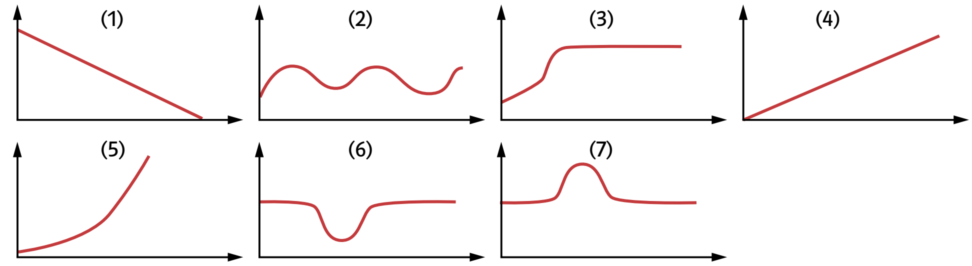
a) Zu welchem Auto passt die Tabelle in Fig. 1? Begründe.
b) Zu welchem Auto passt der Graph in Fig. 2? Begründe.
c) Gib für den Benzinverbrauch der drei Autos je eine Funktionsgleichung an, welche die Anzahl der verbrauchten Liter y in Abhängigkeit von den gefahrenen Kilometern x angibt.
d) Julian bezweifelt, dass sich der Benzinverbrauch in Wirklichkeit exakt durch eine lineare Funktion beschreiben lässt. Nimm Stellung.

5 Nach dem Betriebspraktikum in Klasse 9 soll jeder Schüler einen Praktikumsbericht von 7 Seiten abgeben. Auf jeder Seite sollen 50 Zeilen Text in der Schrift Arial und der Schriftgröße 12 stehen. Ayse fällt nicht so viel ein, sodass sie unter diesen Bedingungen nur auf 5 Seiten kommt. Sie überlegt sich, den Zeilenabstand zu ändern, sodass statt 50 Zeilen nur 38 Zeilen auf eine Seite passen.
a) Wie viele Seiten hat der Bericht von Ayse jetzt?
b) Wie viele Seiten hätte ein Bericht, der nach den obigen Vorgaben (sieben Seiten, 50 Zeilen pro Seite) geschrieben wurde, in Ayses Formatierung?

Aus den Lernstandserhebungen 2005

6 4500 m³ Bauschutt sollen abtransportiert werden. Fünf LKW würden dazu jeweils 60 Fahrten benötigen, wenn jeder LKW gleichmäßig beladen wird.
a) Wie viel m³ Bauschutt würde ein LKW dann pro Fahrt transportieren?
b) Von den fünf LKW fällt ein LKW aus. Er hat bis dahin bereits 20 Fahrten gemacht. Die restlichen Fahrten dieses LKW müssen die übrigen LKW übernehmen. Wie viele Fahrten muss dann jeder der übrigen LKW insgesamt machen?
c) Wie viele Fahrten müsste jeder LKW machen, wenn zum Abtransport der 4500 m³ nur drei LKW zur Verfügung stehen würden?
d) Wie viele LKW würden benötigt, wenn jeder LKW genau 25 Fahrten machen soll?

7 Welcher der Graphen könnte zu welcher Zuordnung gehören? Begründe.



a) *Zeit → zurückgelegter Weg bei konstanter Geschwindigkeit*
b) *Brenndauer → Höhe einer brennenden Kerze*
c) *Volumen → Füllhöhe einer bauchigen Vase* (Fig. 1)
d) *Zeit → Geschwindigkeit beim Fahren einer Kurve*
e) *Zeit → Abstand vom Boden zum Schaukelbrett.*
f) *Alter eines Menschen → seine Körpergröße*
g) Überlege dir für den übrig gebliebenen Graphen eine passende Zuordnung. Begründe.

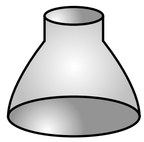


Fig. 1

8 Alexander hat die Aufgabe, die Graphen der linearen Funktionen i) bis iii) zu zeichnen, macht hierbei aber einige Fehler. Finde die Fehler, indem du die Gleichungen zu den von Alexander gezeichneten Geraden (Fig. 2 – 4) aufstellst und erläutere, wie diese Fehler zustande gekommen sein könnten. Zeichne anschließend die richtigen Graphen.

i) $y = 3x + 2$ ii) $y = \frac{2}{3}x - 1$ iii) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

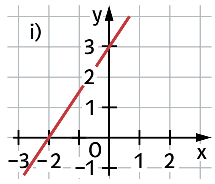


Fig. 2

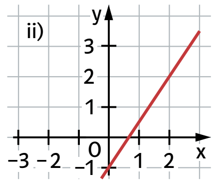


Fig. 3

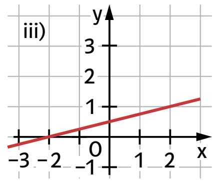


Fig. 4

9 Lisa möchte ihren Handy-Tarif wechseln. Ihr stehen die zwei Angebote zur Verfügung:

Tarif 1:	**0 € Grundgebühr pro Monat**	**17 ct/min in alle deutschen Netze**
Tarif 2:	**7,49 € Grundgebühr pro Monat**	**9 ct/min in alle deutschen Netze**

a) Für welchen Tarif sollte sich Lisa entscheiden? Begründe rechnerisch und zeichnerisch.
b) Der Verkäufer versucht Lisa zu überreden, sich für eine Handy-Flatrate zu entscheiden. Hierbei könnte sie für 24,99 € monatlich so viel telefonieren, wie sie möchte. Wie viele Minuten müsste Lisa monatlich telefonieren, damit sich eine Flatrate für sie lohnt?

10 Manuela hat gelesen, dass die Brenndauer einer Kerze linear mit ihre Länge zusammenhängt. Sie zündet gleichzeitig zwei Kerzen an, misst nach einer bestimmten Zeit die Längen und trägt sie in eine Tabelle ein (Fig. 5).
a) Hängt die Brenndauer einer Kerze nach Manuelas Messungen linear mit ihrer Länge zusammen? Prüfe rechnerisch und zeichnerisch.
b) Gehe davon aus, dass der Zusammenhang tatsächlich exakt linear ist und je die ersten beiden Messwerte von Manuela diesen Zusammenhang für Kerze 1 und 2 eindeutig beschreiben. Zu welchem Zeitpunkt sind beide Kerzen gleich lang?

Zeit	Länge 1	Länge 2
2 h	8 cm	7 cm
2,5 h	5 cm	6,1 cm
3 h 24 min	0 cm	4,9 cm

Fig. 5

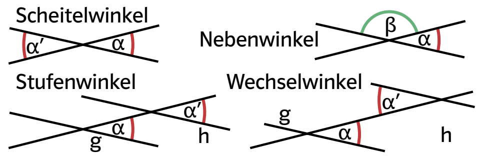
11 Ein Schwimmbecken fasst 70 m³ Wasser. Es wird mit einem Schlauch gefüllt, durch den in einer Stunde 1,9 m³ Wasser fließen. Nach 7 Stunden kommt ein zweiter Schlauch hinzu, durch den in 2 Stunden 3,2 m³ Wasser fließen.
a) Zeichne den Graphen der Funktion *Zeit → Wasservolumen im Schwimmbecken.*
b) Gib die Gleichungen für die Funktion *Zeit → Wasservolumen im Becken für den Zeitraum bis zu sieben Stunden und für den Zeitraum von Beginn der 8ten Stunde an.*
c) Nach wie vielen Stunden ist das Becken zur Hälfte, ganz bzw. zu 85 % gefüllt?

3 Geometrie

In der Geometrie geht es um Figuren in der Ebene und Körper im Raum. Sowohl das Zeichnen von bestimmten Figuren und Körpern als auch das Berechnen von unbekannten Seiten, Winkeln, Umfängen, Flächen und Volumina sind wesentliche Bestandteile.

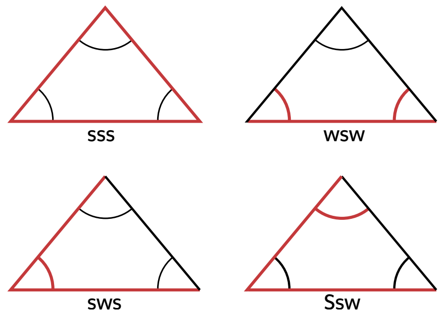
Winkel an Geraden

Scheitelwinkel sind gleich groß.
Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.
An Parallelen gilt:
Stufenwinkel sind gleich groß.
Wechselwinkel sind gleich groß.



Dreiecke konstruieren (Kongruenzsätze)

Ein Dreieck lässt sich eindeutig konstruieren, wenn die folgenden Größen gegeben sind:
- die drei Seiten (sss).
- eine Seite und die beiden anliegenden Winkel (wsw).
- zwei Seiten und der von den Seiten eingeschlossene Winkel (sws).
- zwei Seiten und der Winkel, der gegenüber von der größeren Seite liegt (Ssw).



Besondere Linien im Dreieck

Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten zu A und B haben zu A und B den gleichen Abstand. Die drei **Mittelsenkrechten** eines Dreiecks schneiden sich im Umkreismittelpunkt (Fig. 1).
Alle Punkte auf einer Winkelhalbierenden haben zu den beiden Schenkeln des Winkels den gleichen Abstand. Die drei **Winkelhalbierenden** eines Dreiecks schneiden sich im Inkreismittelpunkt (Fig. 2).

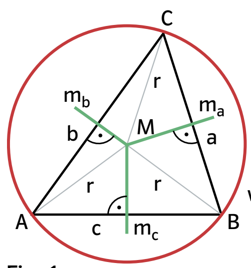


Fig. 1

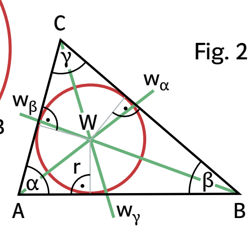
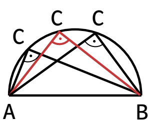


Fig. 2

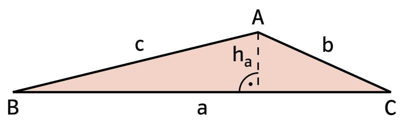
Satz des Thales



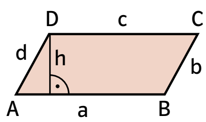
Liegt der Punkt C des Dreiecks ABC auf dem Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$ (Strecke $\overline{AB}$ ist Durchmesser des Kreises), so ist γ ein rechter Winkel. Umgekehrt gilt: Hat ein Dreieck einen rechten Winkel bei C, dann liegt C auf dem Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$.

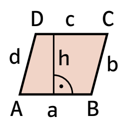
Flächeninhalte von Drei- und Vierecken

Für **Dreiecke** mit der Grundseite a und der zugehörigen Höhe h_a gilt: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$.

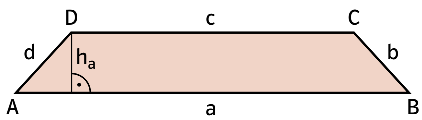


Für **Parallelogramme** bzw. **Rauten** mit der Grundseite a und der zugehörigen Höhe h gilt: $A = a \cdot h$.

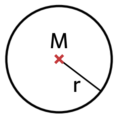




Für **Trapeze** mit a || c und der zu a gehörigen Höhe h_a gilt: $A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h_a$.

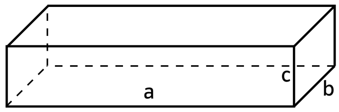


Für Kreise mit Radius r gilt:
Flächeninhalt: $A = \pi \cdot r^2$
Umfang: $U = 2 \cdot \pi \cdot r$
Für die Kreiszahl π gilt: $\pi \approx 3{,}14$



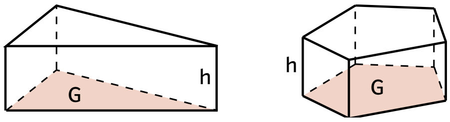
Kreise

Für Quader mit den Seiten a, b und c gilt:
$V = a \cdot b \cdot c$
$O = 2ab + 2bc + 2ac$



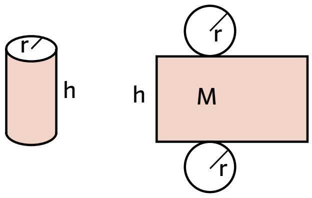
Quader
Es sei:
Volumen: V
Oberfläche: O
Mantelfläche: M

Für Prismen mit der Grundfläche G, der Höhe h und der Mantelfläche M gilt:
$V = G \cdot h.$
$O = 2G + M.$



Prismen

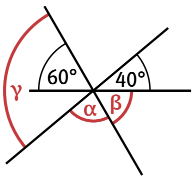
Für Zylinder mit dem Radius r und der Höhe h gilt:
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
$O = M + 2G = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$

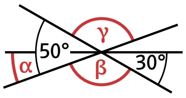


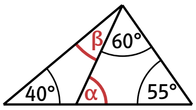
Zylinder

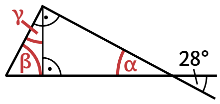
Aufgaben

1 Bestimme jeweils die fehlenden Winkel. Begründe ausführlich.

a)


b)


c)


d)


2 a) Wie groß ist der Höhenunterschied zwischen der Ebene und dem Berggipfel in Fig. 1? Zeichne im Maßstab 1:2000.
b) Um die Breite eines Flusses zu bestimmen, kann man von einem Punkt A aus, die Punkte B und C anpeilen. Die Peilung hat nebenstehende Werte ergeben (Fig. 2). Ermittle die Flussbreite mithilfe einer Konstruktion.

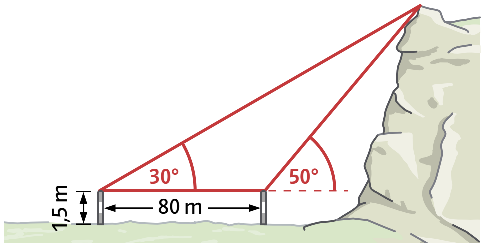


Fig. 1

1:2000 bedeutet, dass 1cm in der Zeichnung 2000 cm = 20 m in der Wirklichkeit entspricht.

3 In einem Dreieck mit den Innenwinkeln α, β und γ ist β um 20° größer als α und γ dreimal so groß wie α. Berechne die Winkel.

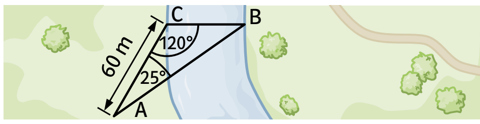
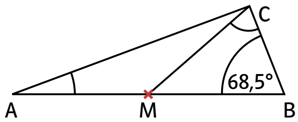


Fig. 2

4 M ist die Mitte der Strecke $\overline{AB}$. Die Strecke $\overline{MC}$ ist halb so lang wie die Strecke $\overline{AB}$. Bestimme die fehlenden Winkel.



5 In einem Koordinatensystem (1 cm entspricht 2 km) sind die Orte Esenshamm E(6|13) und Schwanewede S(11|1) angegeben. Durch die Punkte P(9|15) und Q(7|1) verläuft der Fluss Weser nahezu geradlinig.

Aus den Lernstandserhebungen 2004

a) Übertrage den Sachverhalt in ein Koordinatensystem.
b) Wie groß ist die Entfernung der beiden Orte voneinander?
c) Zwischen Esenshamm und Schwanewede soll ein Kraftwerk gebaut werden. Dieses soll einen gleichen, aber möglichst geringen Abstand zu Esenshamm und Schwanewede haben. Gleichzeitig ist aufgrund der Hochwassergefahr ein Sicherheitsabstand von 6 km zur Weser einzuhalten. Bestimme in der Zeichnung die Stelle, an der das Kraftwerk gebaut werden soll.
d) Trage den Ort Maltenkirchen M(1|9) ebenfalls ins Koordinatensystem ein. Konstruiere den Standort des Kraftwerks, sodass dieses von allen drei Orten gleich weit entfernt ist. Wie groß ist dann die Entfernung des Kraftwerks zum Fluss?

6 Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe.
a) In einem gleichseitigen Dreieck ist der Innkreismittelpunkt zugleich der Umkreismittelpunkt.
b) Es gibt kein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 3\,cm$, $b = 5\,cm$ und $c = 9\,cm$.
c) Jedes gleichschenklige Dreieck mit einem 60°-Winkel ist gleichseitig.
d) Ein Dreieck mit genau einer Symmetrieachse ist gleichschenklig.
e) Drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, liegen immer auf einem Kreis.

7 a) Was soll in Fig. 1 zum Ausdruck gebracht werden? Nenne alle Beziehungen, die sich aus Fig. 1 ablesen lassen.
b) Welches Viereck könnte gemeint sein? Manchmal gibt es mehrere Möglichkeiten.
(I) Das Viereck hat vier rechte Winkel und je zwei zueinander parallele Seiten.
(II) Die Diagonalen sind gleich lang.
(III) Alle vier Seiten sind gleich lang.

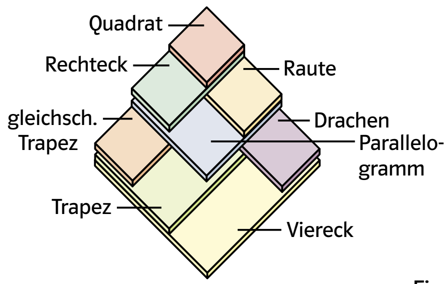


Fig. 1

8 a) Ein Kästchen soll einem halben Zentimeter entsprechen. Haben die beiden Figuren (Fig. 2 und Fig. 3) gleiche Flächeninhalte? Begründe. Berechne außerdem die Flächeninhalte der beiden Figuren.
b) Bestimme die Flächeninhalte von Fig. 4 und Fig. 5. Erläutere dein Vorgehen.
c) Jana behauptet: „Der Flächeninhalt des Kreises kann nicht doppelt so groß sein, wie der des Quadrates.“ Begründe mithilfe von Fig. 6, ohne die Formel für den Flächeninhalt des Kreises zu verwenden.

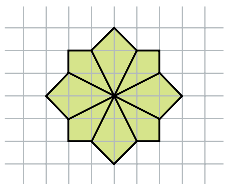


Fig. 2

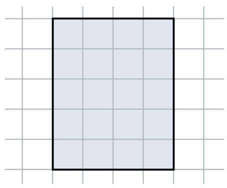


Fig. 3

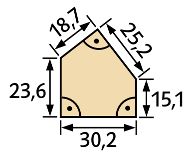


Fig. 4

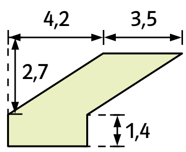


Fig. 5

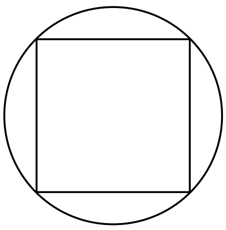


Fig. 6

9 a) Erkläre den Begriff Prisma, ohne das Wort Prisma zu nennen.
b) Zeichne Fig. 7 in dein Heft und vervollständige zum Netz eines Prismas.
c) Bestimme das Volumen des Prismas.

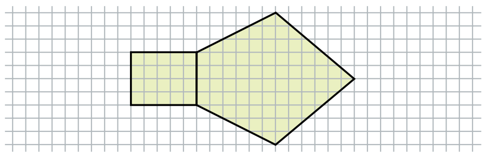


Fig. 7

10 Berechne das Gesamtvolumen der Möbelstücke in Fig. 2 und Fig. 3.

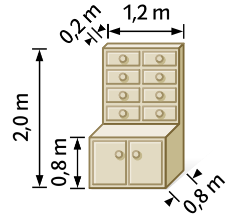


Fig. 2

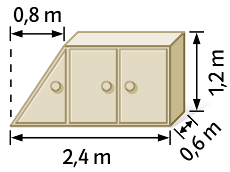


Fig. 3

11 Ein DIN-A4-Blatt (21 cm breit und 29,7 cm lang) wird an den kurzen Seiten zusammengeklebt, sodass eine Rolle entsteht (Fig. 1). Der Kleberand beträgt 7 mm.

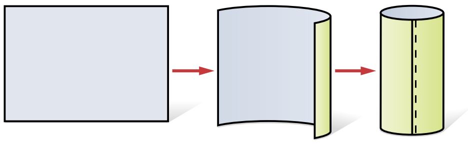


Fig. 1

a) Bestimme den Umfang der Papierrolle.
b) Erläutere, wie man aus den gegebenen Größen den Radius des Zylinders bestimmen kann und zeige rechnerisch, dass $r \approx 4{,}62$ cm beträgt.
c) Bestimme rechnerisch das Volumen des so entstandenen Zylinders und prüfe, ob es größer als ein Liter ist.
d) Man kann das DIN-A4-Blatt auch andersherum zusammenrollen. Berechne das Volumen, wenn man auch hier 7 mm für den Kleberand benötigt. Um wie viel Prozent weicht das Ergebnis von dem in c) ab.
e) Handwerker benutzen zur Kreisumfangberechnung oft die folgende Faustformel:
„Kreisumfang gleich Durchmesser mal 3 plus 5 Prozent vom Ergebnis“
e1) Berechne den Umfang der obigen Papierrolle ($r \approx 4{,}62$ cm) mithilfe der Faustformel.
e2) Berechne den Näherungswert für π, der bei dieser Faustformel verwendet wird.
f) Welche Bruchzahl $\frac{m}{n}$ mit $n \in \{1; 2; 3, 4; 5; 7; 8; 9\}$ hat die geringste Differenz zu π. Begründe deine Entscheidung.

12 Die Pizzeria „Bella Italia“ bietet Pizzen in zwei verschiedenen Größen und mit unterschiedlichen Belägen an. Eine große Pizza Margherita (mit Tomaten und Käse) mit einem Durchmesser von 30 cm kostet 6,00 €.

a) Wie groß ist die Fläche der großen Pizza Margherita und wie lang ist ihr Rand?
b) Die Fläche der großen Pizza ist doppelt so groß wie die Fläche der kleinen Pizza. Wie groß ist der Durchmesser der kleinen Pizza?
c) Wenn man bei der großen Pizza neben den Belägen Käse und Tomaten zusätzlich Salami und Champignons bestellt, so ist der Preis der Pizza um 16 % höher. Was kostet diese Pizza (gerundet auf eine Nachkommastelle)?
d) Jede große Pizza Margherita hat außen herum eine 1,5 cm breite Randfläche, die nicht belegt ist. Wie groß ist die belegte Fläche und wie groß die nicht belegte Fläche der großen Pizza? Wie viel Prozent der Gesamtfläche ist belegt?
e) Die Pizzeria „Bella Italia“ bietet auch ein Sonderangebot für Familien an und zwar eine Familienpizza mit 45 cm Durchmesser, die 12,00 € kostet. Bewerte dieses „Sonderangebot“.

13 Die Quadratfolge in Fig. 4 ist nach einem bestimmten Muster aufgebaut.
a) Beschreibe die Regel zur Bildung der Quadratfolge mit eigenen Worten.
b) Bestimme den Flächeninhalt der Quadrate durch Zerlegung. (Kästchenlänge 1 cm)
c) Welche allgemeine Regel zur Bestimmung der Flächeninhalte der Quadrate lässt sich finden?

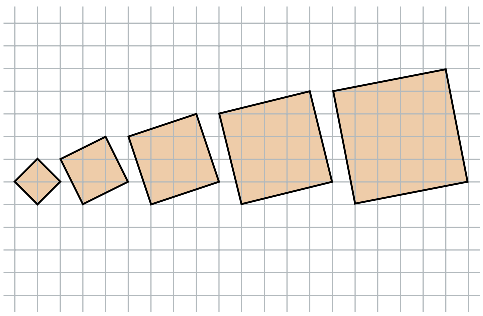


Fig. 4

4 Stochastik

Stochastik umfasst drei Teilgebiete. In der **beschreibenden Statistik** sammelt man Daten, bestimmt relative Häufigkeitsverteilungen, stellt sie grafisch dar und beschreibt sie durch Kenngrößen. In der **Wahrscheinlichkeitsrechnung** geht es um „theoretische“ Wahrscheinlichkeiten, mit denen man „reale“ relative Häufigkeiten bei Zufallsexperimenten und statistischen Erhebungen vorhersagen möchte. In der **beurteilenden Statistik**, prüft man, ob „angenommene“ Wahrscheinlichkeiten zu relativen Häufigkeiten passen.

Wahrscheinlichkeit
(Laplace und nicht Laplace)

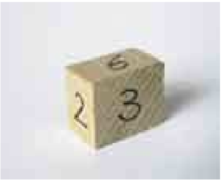


Fig. 1

Gegenüberliegende Zahlen eines Quaders ergeben in der Summe 7 und besitzen die gleiche Wahrscheinlichkeit.

Den Ergebnissen von Zufallsexperimenten oder statistischen Erhebungen kann man **Wahrscheinlichkeiten** zuordnen, die zusammen 100 % ergeben müssen. Die Wahrscheinlichkeiten geben an, welche relative Häufigkeit man auf lange Sicht erwartet. Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt, wenn sie relative Häufigkeiten gut vorhersagen.

Wenn bei einem Zufallsexperiment mit n möglichen Ergebnissen alle n Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, spricht man von einem **Laplace-Experiment** und berechnet die Wahrscheinlichkeit p eines Ergebnisses mit der Formel $p = \frac{1}{n}$.

Beispiel
Bei einem Laplace-Würfel ist die Wahrscheinlichkeit für jede Augenzahl $p = \frac{1}{6} \approx 0{,}167 = 16{,}7\,\%$.
Das Würfeln mit Quadern (Fig. 1) ist **kein Laplace-Experiment**, hier muss man die Wahrscheinlichkeiten aus relativen Häufigkeiten schätzen, wobei man auf Symmetrien achtet. Aus relativen Häufigkeiten ergibt sich für die geschätzten Wahrscheinlichkeiten:
$p(1) = p(6) = 0{,}1$ $\quad$ $p(2) = p(5) = 0{,}07$ $\quad$ $p(3) = p(4) = 0{,}33$.

Summenregel

Man kann mehrere Ergebnisse zu einem **Ereignis** zusammenfassen. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse addiert.

Beispiel
Die Wahrscheinlichkeit p für das Würfeln einer Zahl, die größer als 2 ist, beträgt mit einem Laplace-Würfel $p = \frac{4}{6} \approx 0{,}667 = 66{,}7\,\%$, da 3, 4, 5 und 6 größer sind als 2.

Baumdiagramm

Mehrstufige Zufallsexperimente beschreibt man durch Baumdiagramme. Das Baumdiagramm unten verdeutlicht die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Augensumme 8“ beim zweimaligen Würfeln mit einem Laplace-Würfel.

Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit eines jeden Pfades erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades multipliziert.

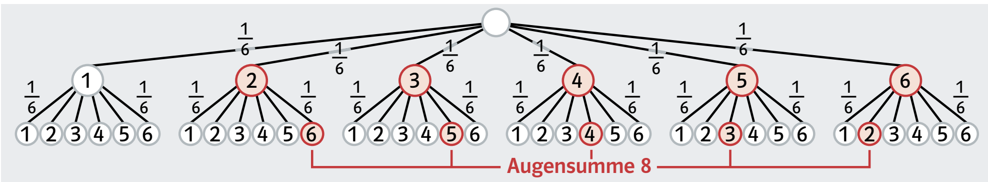


Fig. 2

Beispiel
In Fig. 2 ist die Wahrscheinlichkeit für jeden Pfad $p = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Da fünf Pfade, (2; 6); (3; 5); (4; 4); (5; 3) und (6; 2), zur „Augensumme 8“ führen, ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis nach der Summenregel $p = 5 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{36} \approx 0{,}139 = 13{,}9\,\%$.

Bemerkung: Für den Quader in Fig. 1 ist die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme 8“
p = 0,07 · 0,1 + 0,33 · 0,07 + 0,33 · 0,33 + 0,07 · 0,33 + 0,1 · 0,07 = 0,1691 = 16,91 %

Beschreibende Statistik Häufigkeiten

Die Anzahl, mit der bei einer statistischen Erhebung (oder einem Zufallsversuch) Ergebnisse auftreten, heißt **absolute Häufigkeit**. Den zugehörigen Anteil an der Gesamtzahl nennt man **relative Häufigkeit**. Es gilt: relative Häufigkeit = $\frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}}$.

Beispiel
Bei einem Test erzielten 30 Schüler die folgenden Punkte:
2; 3; 5; 5; 4; 7; 6; 8; 3; 6; 6; 2; 7; 2; 5; 5; 5; 3; 6; 3; 4; 5; 5; 7; 1; 2; 4, 5; 7; 9.

Durch Auszählen erhält man die absoluten und die relativen Häufigkeiten der verschiedenen Punkte (Fig. 1).

Punkte im Test	1	2	3	4	5	6	7	8	9
absolute H.	1	4	4	3	8	4	4	1	1
relative H.	3,3 %	13,3 %	13,3 %	10,0 %	26,7 %	13,3 %	13,3 %	3,3 %	3,3 %

Fig. 1

Kenngrößen Mittelwerte Streuungsmaße

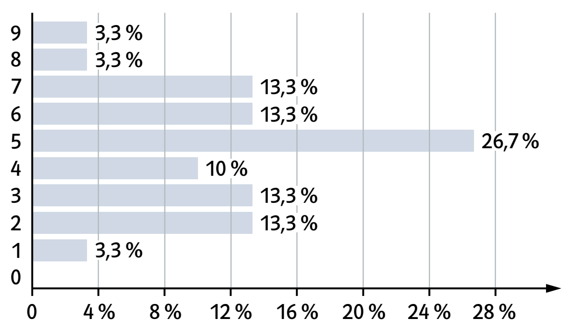
Die **Kenngrößen** bestimmt man wie folgt:
arithmetisches Mittel: (1 · 1 + 4 · 2 + 4 · 3 + 3 · 4 + 8 · 5 + 4 · 6 + 4 · 7 + 1 · 8 + 1 · 9) : 30 ≈ 4,73
Median (Zentralwert): Um den Median ablesen zu können, muss man die Liste sortieren:

1 2 2 2 2 3 3 **3** 3 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 6 6 6 **6** 7 7 7 7 7 8 9

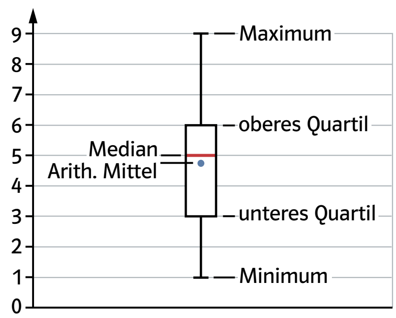
Minium **unteres Quartil** **Median = (5 + 5) : 2** **oberes Quartil** **Maximum**

Da die Länge der Liste (30) gerade ist, nimmt man als Median den Mittelwert des 15ten und des 16ten Wertes. Man erhält als **Median 5**.
Spannweite: Maximum − Minumum = 9 − 1 = 8
Quartilabstand: oberes Quartil − unteres Quartil = 6 − 3 = 3
} Streuungsmaße

Die Daten werden wie folgt in Diagrammen veranschaulicht:

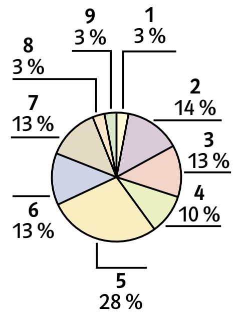


Balkendiagramm



Boxplot

Diagramme



Kreisdiagramm

Aufgaben

1 Bestimme bei dem Glücksrad in Fig. 2 die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse.
a) „Rot“ b) „7“ c) „ungerade Zahl“ d) „Teiler von 10“
e) „Die Summe der gedrehten Zahlen beim zweimaligen Drehen ist 6“
f) „Das Produkt der gedrehten Zahlen beim zweimaligen Drehen ist durch 3 teilbar“

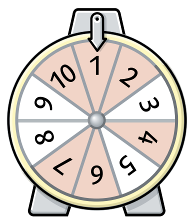
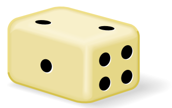


Fig. 2



Quader mit quadratischer Grundfläche

Würfel

2 In einer Urne befinden sich eine gelbe, drei rote, zwei blaue und vier grüne Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit für „grün" ist damit $\frac{4}{10} = 40\,\%$. Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer grünen Kugel wenn man
a) von jeder Farbe eine Kugel dazulegt,
b) von jeder Farbe eine Kugel wegnimmt,
c) zwei grüne und drei gelbe dazulegt,
d) eine grüne und alle blauen wegnimmt,
e) jeweils die Anzahl der Kugeln verdoppelt?

3 Die Summe gegenüberliegender Zahlen ist bei Quadern und Würfeln stets 7.
a) Ist die Wahrscheinlichkeit für „6" beim Quader oder beim Würfel größer? Begründe.
b) Beim Quader ist die Wahrscheinlichkeit für eine „4" 10 %. Wie groß müssen dann die Wahrscheinlichkeiten für die übrigen Zahlen sein? Welche Annahmen machst du bei deiner Rechnung?
c) Bestimme für den Quader und den Würfel die Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis „In zwei Würfen ist die Augensumme größer als 6" mithilfe eines Baumdiagramms.
d) Bestimme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „In drei Würfen keine 1".

	W' keiten
1	10%
2	10%
3	40%
4	20%
5	10%
6	10%

Fig. 1

4 In der 8a haben die Schüler nach vielen Versuchen die Wahrscheinlichkeiten eines Lego-Vierers wie in Fig. 1 geschätzt.
a) Erläutere, wie die 8a dabei vorgegangen sein könnte.
b) Berechne mit der Schätzung der 8a die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man beim viermaligen Würfeln mit dem Lego-Vierer „mindestens zweimal die 4 (Noppen oben)" erhält.
c) Inga steckt zwei der Lego-Vierer zu einem Doppelvierer zusammen (vgl. Fig. 2). Beschreibe, wie sich dadurch die Wahrscheinlichkeiten ändern. Gib eine Schätzung an.
d) Überprüfe die Schätzung durch eine Versuchsreihe mit 100 Würfen eines Doppelvierers.

Fig. 2

5 Auf einem Fest hast du die Möglichkeit, zwischen zwei Lottovarianten zu wählen: „3 aus 5" und „5 aus 7". Du erhältst nur dann einen Preis, wenn du alle Zahlen richtig hast.
a) Schätze die Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Lottovarianten.
b) Simuliere die beiden Lottovarianten zusammen mit deinem Nachbarn jeweils 50-mal mit einem Würfel bzw. einem Kartenspiel. Berechne die relativen Häufigkeiten für „Spiel gewonnen" bzw. „Spiel verloren".
c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis „Spiel gewonnen" für beide Lottovarianten mithilfe eines Baumdiagramms. Für welche sollte man sich entscheiden und inwiefern bestätigt die Simulation in b) die theoretisch ermittelten Wahrscheinlichkeiten?
d) Die Variante „3 aus 5" kostet einen Euro Einsatz. Hat man drei Zahlen richtig, gewinnt man 5 €, hat man nur zwei von drei Zahlen richtig, erhält man 2 € und bei einer richtigen Zahl erhält man seinen Einsatz zurück. Berechne mithilfe der Simulation aus b) die relativen Häufigkeiten für 0, 1, 2, und 3 Treffer und anschließend die Wahrscheinlichkeiten. Muss man bei dieser Spielvariante auf lange Sicht mit Einnahmen oder Verlusten rechnen?

6 Die Schüler der 8d wurden befragt, wie viele Stunden sie täglich „im Netz" verbringen. Die Antworten werden im Folgenden aufgelistet (alle Angaben in h):
3; 2; 0; 1; 5; 1; 1; 3; 4; 2; 3; 2; 3; 7; 4; 1; 5; 4; 6; 2; 2; 3; 4; 2; 5; 3; 3; 5, 4
a) Bestimme das Minimum, das Maximum, die Spannweite, das arithmetische Mittel, den Median und den Quartilabstand der aufgeführten Daten.
b) Bestimme die absoluten und relativen Häufigkeiten der auftretenden Zeiten und veranschauliche die Ergebnisse der Befragung in einem Säulendiagramm sowie einem Boxplot.
c) In der 8c verbringen die Schüler im Durchschnitt vier Stunden am Tag „im Netz". Gib zu diesem Durchschnittswert mindestens zwei mögliche Datenreihen mit jeweils 21 Daten an.

7 Die 24 Schüler der Klasse 8a machten die folgenden Angaben zu ihrer Lieblingssportart: Sieben Schüler nannten Fußball, ein Drittel nannte Volleyball und 25% Badminton. Alle anderen Schüler wählten Basketball. Jeder Schüler durfte nur eine Sportart angeben.
a) Stelle das Wahlverhalten der Schüler in einem Kreisdiagramm dar.
b) Jana möchte den Mittelwert aller Daten berechnen, kann sich aber nicht erinnern, wie das geht. Kannst du ihr helfen?

8 In einer Umfrage wurden Erwachsene nach ihren monatlichen Ausgaben fürs Handy gefragt. Die Umfrageergebnisse in Euro sind in einem Boxplot dargestellt (Fig. 1). Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe und korrigiere gegebenenfalls.
a) 50% aller Frauen geben zwischen 65 und 140 € aus.
b) Der sparsamste Mann gibt weniger als 5 € aus.
c) 25% der Frauen geben zwischen 45 und 65 € aus.
d) Mehr als 50% der Frauen geben mehr als 80 € aus.
e) Weniger als 50% der Männer geben mehr als 40 € aus.
f) Von den Männern geben mehr als 25% zwischen 35 und 60 € aus.

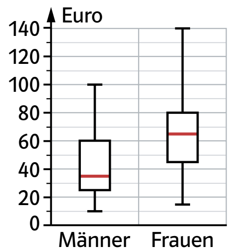


Fig. 1

9 In der Tabelle in Fig. 3 ist das Ergebnis einer Umfrage zum Thema E-Mail-Versand aufgeführt. Befragt wurden Erwachsene im Alter von 25 bis 65 Jahren. Zu den Umfrageergebnissen wurde ein Zeitungsartikel (Fig. 2) verfasst.
a) Der Artikel enthält fünf Behauptungen. Welche davon kannst du aufgrund der Daten bestätigen, welche nicht? Begründe durch geeignete Rechnung.
b) Stelle die Daten der Tabelle in Fig. 3 in einem Boxplot dar.

E-Mail, die schnelle Post
Das Versenden von E-Mails wird immer beliebter. Vor allem junge Menschen nutzen diese Möglichkeit intensiv. Immerhin versenden über die Hälfte von ihnen regelmäßig mehr als 4 E-Mails pro Tag, unter den über 30-Jährigen sind dies nur 30%.
Auch scheint sich die Gruppe der unter 30-Jährigen über die Vorteile der elektronischen Post einig zu sein, senden doch mehr als 50% von ihnen zwischen 4 und 8 E-Mails pro Tag, während in der älteren Gruppe die Spanne von 0 bis 12 E-Mails pro Tag reicht.

Fig. 2

Anzahl der versandten E-Mails pro Tag	Anzahl der Personen	
	bis 30 Jahre	über 30 Jahre
0	3	29
1	5	21
2	17	16
3	25	13
4	17	6
5	30	11
6	13	9
7	6	2
8	10	3
9	4	0
10	5	7
11	2	0
12	1	2

Fig. 3

10 In einer Autobahnbaustelle darf höchstens Tempo 60 gefahren werden. Die Polizei führt Geschwindigkeitskontrollen durch. Nach 15 Messungen kann man Folgendes sagen: „Der Median der gemessenen Geschwindigkeiten beträgt 63 km/h. Von den 15 Messwerten sind hier 14 aufgelistet (alle Angaben in km/h): 55; 58; 59; 59; 60; 61; 62; 63; 64; 65; 65; 78; 97; 140.
a) Gib zwei mögliche Beispiele für die fehlende Geschwindigkeit an. Begründe.
b) Das arithmetische Mittel aller gemessenen Geschwindigkeiten beträgt 70 km/h. Berechne den noch fehlenden Geschwindigkeitswert.
c) Woran liegt es, dass in diesem Beispiel das arithmetische Mittel viel größer ist als der Median? Wie könnte man das arithmetische Mittel vergrößern oder verkleinern, ohne den Median zu verändern?

Aus den Lernstandserhebungen 2007

5 Kommunizieren und Argumentieren

Beim Kommunizieren und Argumentieren geht es darum, mathematische Informationen aus Texten, Tabellen und Graphen entnehmen und nutzen zu können. Der Umgang mit mathematischen Begriffen und das Beweisen und Widerlegen von Behauptungen spielen eine wesentliche Rolle.

Informationen entnehmen, deuten und vorteilhaft nutzen

Beispiel 1
Fig. 1 zeigt die Schulwege von Nadine und Bianca. Beantworte, falls möglich, und begründe.
a) Wer geht früher von zu Hause los und wie viele Minuten?
b) Was macht Nadine zwischen 7.40 und 7.45 Uhr?
c) Wer läuft ab 7.55 Uhr schneller?
d) Wie weit ist der Schulweg von Nadine?

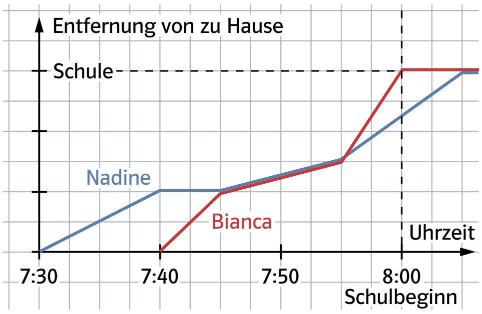


Fig. 1

Mögliche Lösung:

Nicht offensichtliche Informationen aus den Graphen lesen!

a) Nadine geht 10 Minuten früher los als Bianca. *Diese Information lässt sich direkt ablesen, da der Graph von Nadine um 7.30 Uhr beginnt und der von Bianca erst um 7.40 Uhr.*
b) Nadine bleibt stehen. *Zunächst einmal sucht man den Zeitpunkt 7.45 Uhr auf der x-Achse. 7.45 Uhr muss genau in der Mitte zwischen 7.40 Uhr und 7.50 Uhr liegen. Zwischen 7.40 und 7.45 Uhr besitzt der Graph von Nadine keine Steigung, also nähert sich Nadine in diesem Zeitraum nicht der Schule; sie bleibt also stehen. Theoretisch wäre es auch möglich, dass sie im Kreis um die Schule geht, was allerdings sehr unrealistisch ist.*
c) Ab 7.55 Uhr läuft Bianca schneller als Nadine. *7.55 Uhr findet man wieder in der Mitte zwischen 7.50 Uhr und 8.00 Uhr. Ab 7.55 Uhr wird der Graph von Bianca steiler. Ab diesem Zeitpunkt legt sie also die gleiche Entfernung zur Schule in weniger Zeit (in fünf Minuten) als Nadine (in zehn Minuten) zurück, sie ist also schneller als Nadine.*

Welche Informationen liefert ein Diagramm nicht?

d) Diese Frage kann nicht eindeutig beantwortet werden, da auf der y-Achse keine Angabe zur Entfernung gemacht wurde. *Hier kann aber mithilfe der Zeitangaben geschätzt werden. Da Nadine ohne die „Pause“ (vgl. Textaufgabe b) 30 Minuten zur Schule geht und ein Fußgänger etwa 4 km/h schnell ist, ist ihr Schulweg vielleicht etwa zwei Kilometer lang.*

Einen Fehler finden und seine Ursache präzise in Worte fassen

Beispiel 2
Die folgenden Termumformungen sind falsch. Wie könnten diese Fehler zustande gekommen sein? Welche Rechenregeln wurden dabei verletzt?
a) $(3s + 4t)^2 = 3s^2 + 24st + 4t^2$ b) $-3x(2x - 5) = -6x^2 - 15x = -21x$
Mögliche Lösung:

Fehler ggf. durch Nachrechnen identifizieren!

a) Hier wurde die erste binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ benutzt. Es wurde aber außer Acht gelassen, dass dabei $a = (3s)$ und $b = (4t)$ gilt und deshalb nicht nur die Variablen s und t quadriert werden müssen. Man hätte also $(3s)^2 = 9s^2$ und $(4t)^2 = 16t^2$ rechnen müssen und erhielte dann insgesamt: $(3s + 4t)^2 = 9s^2 + 24st + 16t^2$.

Ursachen des Fehlers erkennen und verletzte Rechenregeln in eigenen Worten erläutern!

b) Zunächst einmal wurde die Klammer aufgelöst. Hierbei wurde nicht beachtet, dass sich durch das negative Vorzeichen vor der Klammer beim Auflösen alle Vorzeichen in der Klammer „umdrehen“. Es müsste heißen: $-3x(2x - 5) = -6x^2 + 15x$, da $-3x \cdot (-5) = +15x$.
In der zweiten Umformung wurde nicht beachtet, dass sich beim Addieren oder Subtrahieren von Termen nur gleichartige Terme zusammenfassen lassen. Der Term „$-6x^2 + 15x$“ lässt sich also nicht weiter vereinfachen.

Beispiel 3

Behauptungen überprüfen

Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe.
a) Anna behauptet: „Ein Viereck, bei dem die gegenüberliegenden Seiten gleich lang und parallel sind, ist immer ein Rechteck."
b) Martin meint: „Multipliziert man eine Zahl mit sich selbst, erhält man immer eine Zahl, welche größer ist als die ursprüngliche Zahl."
c) Theodor behauptet: „Setzt man in den Term $21n + 15$ eine natürliche Zahl für n ein, so erhält man immer eine Zahl, die durch 3 teilbar ist."
Mögliche Lösung:
a) Es stimmt, dass bei jedem Rechteck die gegenüberliegenden Seiten gleich lang und parallel sind. Die Behauptung von Anna ist aber trotzdem falsch, denn auch in einem Parallelogramm (Fig. 1) sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang und parallel.

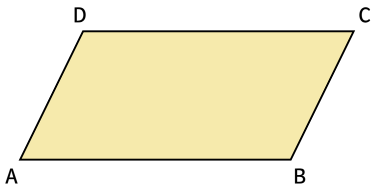


Fig. 1

Gegenbeispiel finden, welches alle genannten Eigenschaften hat und trotzdem kein Rechteck ist!

b) Die Behauptung ist falsch, denn z. B. $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25 < 0{,}5$. Die Aussage ist für alle Zahlen richtig, die größer als 1 oder kleiner als 0 sind, also z. B. 1,5 oder auch $-0{,}5$, denn $1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25 > 1{,}5$ und $(-0{,}5) \cdot (-0{,}5) = 0{,}25 > -0{,}5$. Für die Zahlen 0 und 1 und alle Zahlen, die zwischen 0 und 1 liegen, ist die Behauptung falsch.

Behauptung an unterschiedlichen Zahlenbeispielen überprüfen!

c) Die Behauptung ist wahr, denn $21n$ und 15 sind durch 3 teilbar, also auch deren Summe. Es gilt: $21n + 15 = 3(7n + 5)$ und ein Produkt aus 3 und einer anderen natürlichen Zahl ist immer durch 3 teilbar.

Beispiele sind hilfreich, reichen aber nicht aus, um die wahre Aussage zu begründen.

Aufgaben

1 Nimm Stellung zu dem folgenden Zeitungsausschnitt:

„Jede dritte Ehe wird geschieden. In Großstädten sogar jede vierte."

2 Die Achtklässler eines Gymnasiums wurden befragt, welche Haustiere sie haben. Von den Befragten haben 50 % eine Katze, 20 % einen Hund, 17 % einen Vogel, 15 % einen Hamster und 10 % ein Kaninchen. 18 % der Befragten besitzen kein Haustier.
a) Jens hat das Umfrageergebnis im Kreisdiagramm (Fig. 2) dargestellt. Katja behauptet, dass etwas mit dem Kreisdiagramm nicht stimmen kann. Was meint Katja?
b) Wieso lässt sich zu den Umfrageergebnissen kein passendes Kreisdiagramm zeichnen und wie kann es zu derartigen Umfrageergebnissen kommen?
c) Zeichne ein Diagramm, das zu den Umfrageergebnissen passt.

Aus den Lernstandserhebungen 2007.

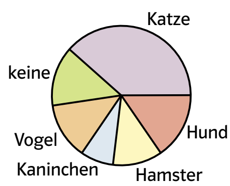


Fig. 2

3 Dies ist ein Auszug aus Leonards Klassenarbeit zum Thema Termumformungen. Welche Rechenregel hat Leonard verletzt und auf welche Weise? Erläutere und korrigiere die Fehler.

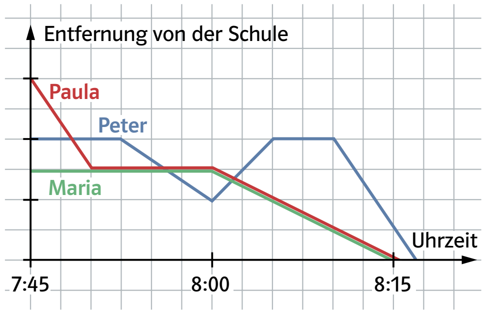
a) $(a - 3)(a + 5) = a^2 - 15$
b) $6s^3 - 2s^2 = 4s$
c) $(4 + x)^2 = 16 + x^2$
d) $(5x - y^3)^2 = 5x^2 - 5xy^3 + y^9$
e) $\frac{2x + 5}{2} = x + 5 = 5x$
f) $\sqrt{x^2 + 16} = x + 4$
g) $-3x(5 - 2x) = -15x - 2x = -17x$
h) $2\sqrt{48} + 7\sqrt{27} = 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$
i) $2x \cdot 3x - 2x = 2x \cdot x = 2x^2$
j) $\sqrt{22} + \sqrt{3} = \sqrt{25} = 5$

Tipp: Prüfe erst an Beispielen.

4 Lena behauptet, dass die Summe von sieben aufeinander folgenden Zahlen immer durch sieben teilbar ist. Hat sie Recht? Begründe.

Aus den Lernstandserhebungen 2004.

5 Die Abbildung zeigt die Schulwege von Paula, Maria und Peter. Alle drei besuchen die gleiche Schule, wohnen aber unterschiedlich weit weg von ihr. Entscheide, ob die folgenden Aussagen stimmen können oder nicht oder ob sie sich nicht beantworten lassen. Begründe deine Entscheidung.



a) Paula wohnt am weitesten von der Schule entfernt.
b) Peter geht am langsamsten und kommt daher auch als letzter in der Schule an.
c) Paula holt Maria von zu Hause ab. Maria ist aber noch nicht fertig, als Paula kommt.
d) Peter hat etwas zu Hause vergessen, was ihm auf halbem Wege einfällt.
e) Paula geht mit Maria schneller als ohne Maria.
f) Maria wohnt 1 km von der Schule entfernt.

Aus den Lernstandserhebungen 2007.

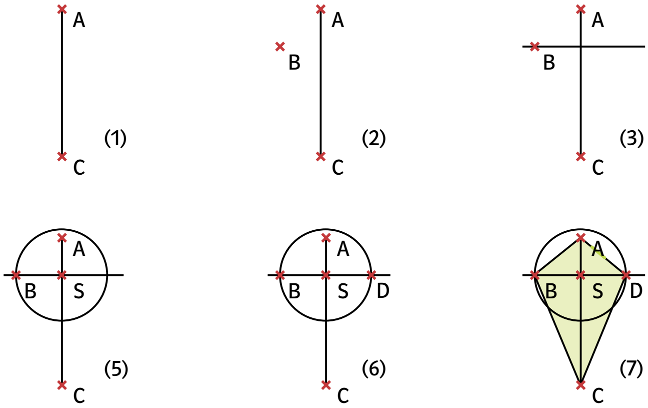
6 An jeder Ecke eines Würfels treffen drei Seitenflächen aufeinander.
a) Wie groß kann die Summe der Augenzahlen an einer Ecke eines Würfels höchstens und wie groß muss sie mindestens sein? Begründe.
b) Kann die Summe der Augenzahlen an einer gemeinsamen Ecke acht sein? Begründe deine Entscheidung.

7 Entscheide, ob die Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe oder widerlege.
a) Jedes Quadrat ist ein Rechteck.
b) Die Graphen einer quadratischen und einer linearen Funktion schneiden sich entweder gar nicht oder genau in zwei Punkten.
c) Jede ganze Zahl ist auch eine rationale Zahl.
d) Ein Bruch, bei welchem der Zähler ein Teiler vom Nenner ist, ist immer eine ganze Zahl.
e) Der Graph jeder linearen Funktion schneidet die x-Achse genau einmal.
f) Eine Raute mit vier rechten Winkeln ist ein Quadrat.
g) Die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu würfeln, die größer ist als drei, ist größer als die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Zahl zu würfeln, die kleiner oder gleich drei ist.
h) Von zwei Brüchen ist derjenige größer, der den kleineren Nenner hat.
i) Jede Raute ist auch ein Trapez.

8 Greta behauptet: „Setzt man eine natürliche Zahl n in den Term $8n + 1$ ein, so erhält man immer eine ungerade Zahl."
a) Entscheide, ob Greta Recht hat, und begründe deine Entscheidung.
b) Lässt sich mithilfe des Terms $8n + 1$ jede ungerade Zahl darstellen? Begründe.
c) Finde drei weitere Terme, mit denen man nur ungerade Zahlen darstellen kann, und drei, mit welchen man nur gerade Zahlen darstellen kann.
d) Gibt es einen Term, mit welchem man jede ungerade bzw. gerade Zahl darstellen kann? Begründe und gib diesen Term gegebenenfalls an.

9 Volker behauptet: „Wenn drei Dienstage in einem Monat auf ein geradzahliges Tagesdatum fallen, dann ist der 21. dieses Monats ein Sonntag."
Hat Volker Recht? Begründe.

10 a) Im Folgenden wird ein besonderes Viereck konstruiert. Formuliere zu Schritt 1 bis 7 die passenden Konstruktionsschritte.



b) Wie nennt sich das Viereck aus a) und welche Eigenschaften dieses Vierecks werden bei der Konstruktion ausgenutzt?
c) Gib eine eigene Definition für das Viereck aus a) an und überlege, für welche anderen besonderen Vierecke diese Definition ebenfalls gilt. Begründe deine Überlegungen.

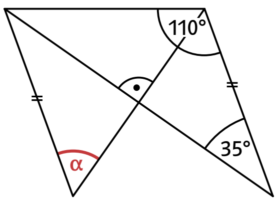
11 In die sechs Lücken sollen sechs Zahlen eingesetzt werden, sodass eine Rechenaufgabe mit Brüchen entsteht.

$$\frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} : \frac{\square}{\square} = ?$$

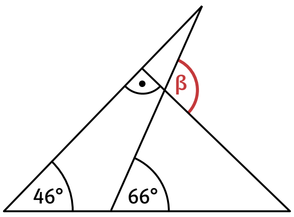
a) Setze die Zahlen 1, 2, 3, 6, 8 und 9 so in die Lücken der Bruchaufgabe ein, dass das Ergebnis möglichst groß ist, und berechne anschließend.
b) Setze die Zahlen 1, 2, 3, 6, 8 und 9 so in die Lücken ein, dass das Ergebnis möglichst klein ist, und berechne anschließend.
c) Begründe deine Wahl in a) und b).
d) Wie würdest du beim Einsetzen von sechs beliebigen Zahlen vorgehen?
e) Wie würdest du vorgehen, wenn statt des positiven Vorzeichens ein negatives Vorzeichen vor dem Bruch stünde?

12 Bestimme die gekennzeichneten Winkel rechnerisch. Begründe ausführlich.

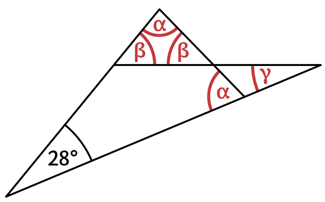
a)



b)



c)



Tipps:
1. Es handelt sich nur um Skizzen, ausmessen kannst du also nicht!
2. Notiere zunächst alle Winkelbeziehungen, die du kennst.

13 Nicole und Meikel streiten sich darum, wer abwäscht. Meikel schlägt vor: „Wenn ich deine Gedanken erraten kann, wäschst du ab, sonst wasche ich ab." Nicole willigt ein und Meikel fordert sie auf: „Denke dir eine beliebige Zahl, verdopple sie und addiere anschließend 3, multipliziere dann das Ergebnis mit 5 und addiere anschließend 15. Dividiere das Ergebnis durch 10 und subtrahiere die anfangs gedachte Zahl. Die Zahl, an die du jetzt denkst, ist die 3." Nicole versucht, während sie abwäscht, Meikels Trick zu verstehen. Kannst du ihr dabei helfen? Zeige, dass bei Meikels Trick immer 3 herauskommt.

6 Problemlösen

Man beschäftigt sich beim Problemlösen mit Problemen, deren Lösungsweg nicht unmittelbar erkennbar ist. Oft muss man zunächst einmal die Aufgabe genau verstehen und sich darüber klar werden, was gegeben und was gesucht ist. Hat man die Aufgabe verstanden, denkt man sich einen Plan aus. Man kann z. B. das Problem in Teilprobleme zerlegen oder man versucht, das Problem durch systematisches Probieren zu lösen. Auch die Einführung von Variablen und das Aufstellen von Termen oder Gleichungen sind oft sinnvoll. Ebenso können Skizzen oder Schätzungen bei der Lösung des Problems helfen. Hat man mit einer Strategie einen Plan für das Vorgehen gefunden, führt man diesen als nächstes aus. Man löst also z. B. die zuvor aufgestellte Gleichung. Nachdem man eine Lösung gefunden hat, muss man in einer Rückschau überprüfen, ob diese Lösung vor dem Hintergrund der Fragestellung sinnvoll und realistisch ist.

Ausprobieren

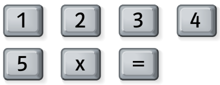


Fig. 1

Erst einmal ausprobieren und Vermutungen anstellen!

Nach Regeln suchen!

Entdeckte Regeln systematisch anwenden!

Beispiel 1
Wie heißt die größte Zahl, die mit einmaligem Benutzen der in Fig. 1 abgebildeten Tasten eines Taschenrechners erzeugt werden kann?
Mögliche Lösung:
Durch Ausprobieren erhält man z. B.
$5432 \cdot 1 = 5432$ $\quad 3421 \cdot 5 = 17105$ $\quad 4321 \cdot 5 = 21605$ $\quad 5321 \cdot 4 = 21284$.
Wenn man eine vierstellige Zahl mit einer einstelligen multipliziert, ist das dritte der vier Ergebnisse das größtmögliche. Kann das Ergebnis größer werden, wenn man eine zweistellige mit einer dreistelligen Zahl multipliziert? Auch hier probiert man zunächst aus.
$321 \cdot 54 = 17334$ $\quad 421 \cdot 53 = 22313$ $\quad 531 \cdot 42 = 22302$ $\quad 521 \cdot 43 = 22403$
Es kommt offensichtlich darauf an, an welcher Stelle die größten Ziffern stehen. Es scheint klar, dass die 4 und die 5 an der ersten Stelle der beiden zwei- und dreistelligen Zahlen stehen müssen und dass die 1 als kleinste Zahl an einer der letzten Stellen stehen muss. Außerdem führt eine 3 an der Zehnerstelle der dreistelligen Zahl zu einem größeren Ergebnis als an der Einerstelle dieser Zahl.
Es gibt sechs Möglichkeiten, sodass die 4 und die 5 vorne stehen, die 1 eine Einerstelle besetzt und die 3 innerhalb der dreistelligen Zahl die Zehnerstelle einnimmt:
$531 \cdot 42 = 22302$ $\quad 532 \cdot 41 = 21812$ $\quad 521 \cdot 43 = 22403$
$431 \cdot 52 = 22412$ $\quad 432 \cdot 51 = 22032$ $\quad 421 \cdot 53 = 22313$
Das größte Ergebnis erhält man also bei $431 \cdot 52 = 22412$.

Nach Strukturen suchen

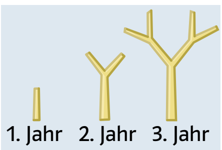
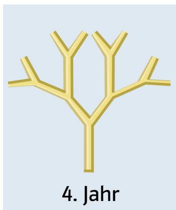


Fig. 2

Muster sinnvoll fortsetzen!

Tabelle anlegen!

Beispiel 2
Beim Igelbaum (Fig. 2) wachsen jedes Jahr aus jeder Spitze zwei neue Spitzen. Wie viele Spitzen hat der Igelbaum nach 8 Jahren?
Mögliche Lösung:
Man könnte zunächst die Idee haben, die Zeichnung fortzuführen. Es ist sogar hilfreich, die Gestalt des Baumes im 4. Jahr zu skizzieren (Fig. 3). Es wird aber schnell klar, dass es nicht sinnvoll ist, dies für die verbleibenden 4 Jahre zu Ende zu führen, da die Zeichnungen immer unübersichtlicher werden. Was kann man noch tun, außer zu zeichnen? Man kann versuchen, eine geeignete Zahlenreihe zu erzeugen. Man könnte z. B. eine Tabelle anlegen, in der jedem Jahr die Anzahl der Spitzen des Igelbaumes zugeordnet wird (vgl. Fig. 3).



Jahr	1	2	3	4	5
Anzahl der Spitzen	1	2	4	8	16

$2 \cdot 8 = 16$, da ja aus jeder der acht Spitzen zwei werden

Fig. 3

Da sich die Anzahl der Spitzen jedes Jahr verdoppelt, lässt sich die Anzahl der Spitzen im achten Jahr A(8) berechnen durch $A(8) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 128$, denn im ersten Jahr hat der Baum nur eine Spitze. Mit jedem Jahr kommt also einmal der Faktor „2" hinzu, sodass sich auch die Spitzen z. B. im 17. Jahr einfach berechnen lassen:
$A(17) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{16} = 65\,536$.

Bildungsgesetz für das Muster erkennen und einen passenden Term aufstellen!

Terme und Gleichungen nutzen

Beispiel 3
Marc und seine Mutter sind heute zusammen 65 Jahre alt. Vor 10 Jahren war die Mutter 4-mal so alt wie Marc. Wie alt sind Marc und seine Mutter heute?
Mögliche Lösung:
1. Schritt: Variablen einführen und Terme aufstellen
Da man das Alter von Marc und seiner Mutter nicht kennt, führt man zunächst geeignete Variablen ein und bestimmt deren Bedeutung. Man benötigt das Alter von Marc und seiner Mutter heute und vor 10 Jahren:
x = Alter von Marc heute, also $x - 10$ = Alter von Marc vor 10 Jahren
y = Alter von Marcs Mutter heute, also $y - 10$ = Alter von Marcs Mutter vor 10 Jahren

Variablen einführen, Terme aufstellen und ihre Bedeutung notieren!

2. Schritt: Gleichungen aufstellen
Da Marc und seine Mutter heute zusammen 65 Jahre alt sind, gilt: $x + y = 65$ (I)
Da Marcs Mutter vor 10 Jahren 4-mal so alt war wie Marc, gilt: $4 \cdot (x - 10) = y - 10$ (II)
(Marcs Alter vor 10 Jahren muss mal 4 genommen werden, um das Alter von Marcs Mutter vor 10 Jahren zu erhalten.).

Beziehungen aus dem Text in Terme und Gleichungen übersetzen!

3. Schritt: Gleichungen lösen
Man hat jetzt zwei Gleichungen und zwei Unbekannte, also ein lineares Gleichungssystem, das sich lösen lässt.

I: $x + y = 65 \quad | - x$
Ib: $y = 65 - x$
Jetzt wird Ib in II eingesetzt:
$$\begin{aligned} 4 \cdot (x - 10) &= (65 - x) - 10 \\ 4x - 40 &= 65 - x - 10 \\ 4x - 40 &= 55 - x && | + x + 40 \\ 5x &= 95 && | : 5 \\ x &= 19 \implies y = 46 \end{aligned}$$

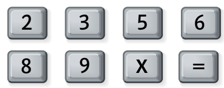
Gleichungen noch einmal am Text überprüfen und lösen!

Antwort: Marc ist heute 19 und seine Mutter 46 Jahre alt, denn $19 + 46 = 65$ und $9 \cdot 4 = 36$.

Lösung immer noch einmal am Text überprüfen!

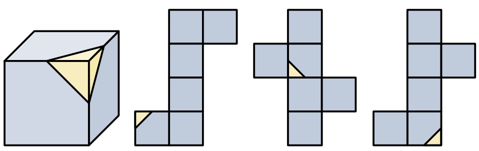
Aufgaben

1 Wie lautet die größte Zahl, die mit einmaligem Benutzen der abgebildeten Tasten eines Taschenrechners berechnet werden kann?



2 a) Pia hat drei gleich aussehende Gewichte. Eines davon ist leichter als die anderen. Wie kann sie das leichte Gewicht mit einmaligem Wiegen auf einer Balkenwaage finden?
b) Jetzt hat sie neun gleich aussehende Gewichte, von denen eines leichter ist als die anderen. Wie viele Wiegevorgänge muss sie mindestens durchführen, um herauszufinden, welches Gewicht leichter ist?
c) Wie viele Wiegevorgänge sind nötig, um herauszufinden, welches das leichtere Gewicht von 27 gleich aussehenden Gewichten ist?

3 Wo im Würfel liegen die anderen gelben Dreiecke? Zeichne die Würfelnetze in dein Heft und zeichne die fehlenden gelben Dreiecke ein.



4 Fig. 1 zeigt die ersten drei Muster einer Folge von Streichhölzern.
a) Wie viele Streichhölzer werden für das 43. Muster benötigt?
b) Gib einen allgemeinen Term für die Anzahl der Streichhölzer im n-ten Muster an.
b) Das wievielte Muster kann man mit 109 Hölzern legen?

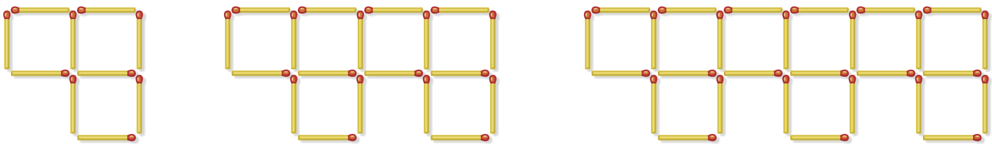


Fig. 1

5 Wie lässt sich mithilfe eines 8-Liter-Gefäßes und eines 5-Liter-Gefäßes, die beide keinerlei Markierung besitzen, ein Liter abmessen? Hierzu darf man so viel Wasser einfüllen und ausschütten, wie man möchte.

Hinweis: Zeichne das Zifferblatt und die Kästchen in dein Heft.

6 a) Teile das Ziffernblatt einer Uhr mit nur einer geraden Linie, sodass die Summe der Zahlen in jeder Hälfte gleich ist.
b) Teile das Ziffernblatt mit zwei geraden Linien, sodass die Summe der Zahlen in den entstehenden Teilen gleich ist.
c) Verteile die Zahlen von 1 bis 8 so in die Kästchen von Fig. 3, dass weder senkrecht noch waagerecht noch diagonal Zahlen aneinander grenzen, die aufeinander folgen.

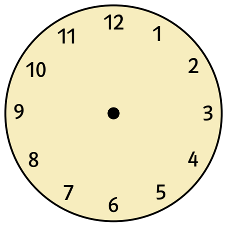


Fig. 2

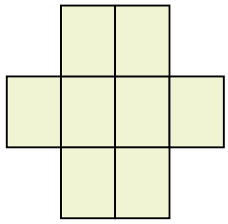


Fig. 3

7 Von vier Zahlen ist die zweite um 7 größer als die erste, um 11 kleiner als die dritte und halb so groß wie die vierte. Die Summe der vier Zahlen ist 114. Wie heißen die Zahlen?

8 Während der Fußball-WM 2006 in Deutschland wurden riesige Skulpturen von Fußballschuhen, die vor dem Bahnhof in Berlin auf den deutschen Erfindergeist aufmerksam machen sollten, zu einer Touristenattraktion.
a) Welche Schuhgröße haben diese Schuhe ungefähr?
b) Wie groß wäre der Mensch ungefähr, dem solche Schuhe passen würden?

Erinnerung: $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$

9 Anton und Emi streiten sich darum, wer den Müll hinunterbringt. Anton schlägt vor: „Du denkst dir eine Zahl von 1 bis 100. Dann gibst du diese Zahl in den Taschenrechner ein und rechnest ‚hoch drei'. Dann sagst du mir das Ergebnis und ich sage dir ohne Taschenrechner sofort die anfangs gedachte Zahl." Emi willigt ein, denn das schafft Anton ihrer Meinung nach nie. Sie gibt 57^3 in den Taschenrechner ein und sagt zu Anton: „185 193".
Anton sagt sofort: „57!" Emi ist verblüfft und trägt verwundert den Müll hinuter. Auf der Treppe zum Hof grübelt und grübelt sie. Wie hat Anton das nur hinbekommen?
Finde heraus, wie Antons Trick funktioniert. Was musste er tatsächlich wissen und was ist unwichtig?

10 Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, deren 3 Ziffern untereinander und von 0 verschieden sind und bei denen das Produkt ihrer Ziffern eine durch 81 teilbare Zahl ist?

11 Fünf Kinder möchten gemeinsam wippen; sie wiegen 15 kg, 25 kg, 30 kg, 35 kg und 45 kg. Wie sollten sie sich am besten auf der Wippe in Fig. 1 verteilen? Bedenke: Wenn ein Kind doppelt so viel wiegt wie ein anderes, sollte es nur halb so weit von der Mitte der Wippe entfernt sitzen. Erkläre, wie du vorgegangen bist.

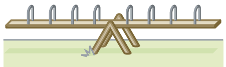


Fig. 1

12 Aus dem roten Quadrat wird ein anderes Quadrat so ausgeschnitten, dass ein 6 cm breiter Rahmen entsteht (vgl. Fig. 2). Der Flächeninhalt des Rahmens beträgt 456 cm^2. Wie groß ist der Flächeninhalt des inneren Quadrats?

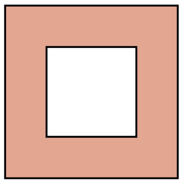


Fig. 2

13 Von einer quadratischen Fläche soll an einer Stelle eine Fläche entnommen werden (1.) und die gleiche Fläche soll an eine andere Stelle des Quadrats angesetzt werden (2.) (Fig. 3). Durch dieses Verfahren ändert sich zwar der Umfang der Figur, nicht aber der Flächeninhalt.
a) Verändere irgendein Quadrat auf diese Weise so, dass sich sein ursprünglicher Umfang verdoppelt, die Fläche aber nicht in Teilflächen zerstückelt wird. Du darfst das Verfahren mehrfach anwenden.
b) Wie müsste man vorgehen, um den Umfang zu verdreifachen?

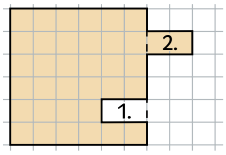


Fig. 3

14 a) Kann man das „Haus vom Nikolaus" (Fig. 4) in nur einem Zug zeichnen, ohne den Stift abzusetzen und ohne eine Linie doppelt zu zeichnen? Wenn ja, in welcher oder welchen Ecken darf man beginnen und wo endet man?
b) Kann man das „Haus vom Weihnachtsmann" (Fig. 5), das direkt neben dem Haus vom Nikolaus steht und dem deshalb eine Hauswand fehlt, ebenfalls in einem Zug zeichnen?
c) Lassen sich auch beide Häuser zusammen (Fig. 6) in einem Zug zeichnen?
d) Unter welchen Voraussetzungen lassen sich derartige Häuser in einem Zug zeichnen und wann nicht?

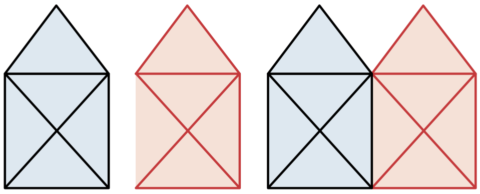


Fig. 4 Fig. 5 Fig. 6

Pollys Tipp:

Zu 14 d): Zähle die Linienendpunkte in den jeweiligen Ecken und überlege dir, was die Anzahl mit dem Gelingen der Aufgabe zu tun haben könnte.

15 Fig. 7 zeigt die ersten drei Muster einer Folge aus Punkten.
a) Wie viele Punkte benötigt man für das 13te Muster?
b) Welcher allgemeine Term lässt sich für die Anzahl der Punkte im n-ten Muster angeben?

Fig. 7

16 Zwei junge Mathematiker lernen sich am Neujahrstag des Jahres 1997 auf einer Party kennen. Der ältere von beiden fragt den jüngeren nach seinem Alter. Dieser stellt das folgende Rätsel: „Wenn du die Quersumme meines vierstelligen Geburtsjahres bildest, weißt du, wie alt ich bin." Der ältere überlegt eine Weile und gratuliert der neuen Bekanntschaft plötzlich zum Geburtstag. Wie alt war der jüngere Mathematiker und woher wusste der ältere, dass er ausgerechnet heute Geburtstag hatte?

Erinnerung: Die Quersumme der Zahl 341 ist $3 + 4 + 1 = 8$.

7 Modellieren

Beim Modellieren geht es darum, passende mathematische Modelle (Terme, Gleichungen, Funktionen, Figuren, Diagramme, Tabellen, Zufallsversuche) für Probleme aus dem Alltag zu finden und diese Probleme mithilfe dieser Modelle zu lösen.

Beispiel 1 Funktionen als Modelle

Familie Meyfahrt fährt mit dem Auto von Köln nach Barcelona. Nach 100 km Fahrt sind 8 Liter Benzin verbraucht. Nach 200 km sind insgesamt 17 Liter verbraucht. Ein Liter Benzin kostet etwa 1,32 €. Wie viel Geld muss Familie Meyfahrt für die einfache Fahrt einplanen?

Mögliche Lösung:

Bekannte Modelle auf Tauglichkeit überprüfen!

1. Übersetzen der Situation in ein mathematisches Modell:

Fehlende Informationen beschaffen!

Man kann davon ausgehen, dass der Benzinverbrauch näherungsweise proportional zu den gefahrenen Kilometern ist. Eine lineare Funktion durch den Ursprung könnte also ein geeignetes Modell zur Lösung der Aufgabe sein. Die Länge der Strecke von Köln nach Barcelona muss zur Lösung der Aufgabe noch herausgefunden werden.

Funktionsgleichung aufstellen und Bedeutung der Variablen festlegen!

2. Mit dem Modell rechnen:

Da das Auto auf den ersten 100 Kilometern 8 Liter und auf den nächsten 100 Kilometern 9 Liter verbraucht hat, kann man von einem durchschnittlichen Verbrauch von 8,5 Litern pro 100 km ausgehen. Also modelliert die Funktion f mit $f(x) = 0{,}085x$ den Benzinverbrauch des Autos der Familie Meyfahrt. x entspricht hierbei der Anzahl der gefahrenen Kilometer und $y = f(x)$ entspricht dem Benzinverbrauch in Litern.

Im Internet findet man für die Autostrecke von Köln nach Barcelona die Angabe 1350 km.

Also verbraucht das Auto insgesamt $f(1350) = 0{,}085 \cdot 1350 \approx 114{,}75$ Liter Benzin.

Die Familie muss etwa $114{,}75 \cdot 1{,}32\,€ = 151{,}47\,€ \approx 150\,€$ Benzinkosten einplanen.

3. Das Modell bewerten:

Eigene Erfahrungen einbeziehen und Modellgrenzen festlegen!

Eine lineare Funktion eignet sich gut als Modell für den Benzinverbrauch eines Autos. Der tatsächliche Benzinverbrauch bzw. die tatsächlichen Benzinkosten können mithilfe dieses Modells nicht exakt, sondern nur näherungsweise berechnet werden, da der Benzinverbrauch z. B. von der Geschwindigkeit abhängt. Bei einer sehr hohen Geschwindigkeit verbraucht ein Auto im Schnitt mehr als bei einer konstanten Geschwindigkeit von 120 km/h.

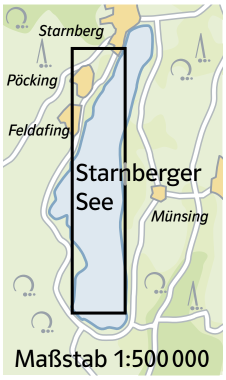


Fig. 1

Beispiel 2 Modelle in der Geometrie

Wie groß ist die Wasseroberfläche des Starnberger Sees (Fig. 1)?

Mögliche Lösung:

1. Übersetzen der Situation in ein mathematisches Modell:

Da die Wasseroberfläche des Sees kein Vieleck ist, lässt sie sich nicht so einfach exakt berechnen. Durch Dreiecke und Vierecke, deren Fläche man berechnen kann, kann man sich allerdings der tatsächlichen Fläche annähern. Das einfachste Modell ist hierbei ein Rechteck, das so gewählt ist, dass es ungefähr der Fläche des Sees entspricht.

Nötige Genauigkeit gegen Aufwand der Vorgehensweise abwägen!

2. Mit dem Modell rechnen:

Das eingezeichnete schwarze Rechteck (Fig. 1) hat die Maße 0,7 cm und 3,5 cm.

Da der Maßstab 1 : 500 000 ist, ist die gesuchte Fläche in der Realität

$A = 350\,000\,\text{cm} \cdot 1\,750\,000\,\text{cm} = 3{,}5\,\text{km} \cdot 17{,}5\,\text{km} = 61{,}25\,\text{km}^2$.

3. Das Modell bewerten:

Ergebnisse mit „Literaturangaben“ vergleichen!

Im Internet wird die Wasseroberfläche des Starnberger Sees mit etwa 57 km² angegeben. Der entstandene relative Fehler $(61{,}25 - 57) : 57 \approx 0{,}075 = 7{,}5\,\%$ ist für die grobe Näherung der gesuchten Fläche über nur ein Rechteck relativ klein. Wesentlich genauer, aber auch aufwändiger, wäre die Annäherung der Fläche durch mehrere Rechtecke und Dreiecke.

Beispiel 3 Stochastische Modelle

Peter und Robert werfen mit einer Reißzwecke. Peter schlägt vor: „Wir werfen die Reißzwecke jeweils dreimal. Landet sie gar nicht auf dem ‚Kopf', hast du gewonnen, und landet sie genau zweimal auf dem ‚Kopf', habe ich gewonnen." Wer hat bei diesem Spiel die besseren Gewinnchancen?

Mögliche Lösung:

1. Übersetzen der Situation in ein mathematisches Modell:

Zunächst einmal muss man herausfinden, wie groß die Wahrscheinlichkeit für „Kopf" beim einmaligen Wurf einer Reißzwecke ist. Hierfür kann man eine Reißzwecke insgesamt 1000-mal werfen (jeder Schüler der Klasse wirft beispielsweise etwa 35-mal) und die relative Häufigkeit für „Kopf" bestimmen.

Fehlende Wahrscheinlichkeiten näherungsweise experimentell bestimmen!

Von den 1000 Würfen ist die Reißzwecke 398-mal „auf dem Kopf" gelandet. Die relative Häufigkeit hierfür ist also $\frac{398}{1000} = 0{,}398 = 39{,}8\,\%$.

Aufgrund dieser experimentell bestimmten Häufigkeit wird $p = 40\,\%$ als Trefferwahrscheinlichkeit festgelegt, wobei eine Landung auf dem „Kopf" ein Treffer sein soll.

2. Mit dem Modell rechnen:

Zur mathematischen Lösung des Problems wird ein Ausschnitt eines Baumdiagramms gezeichnet.

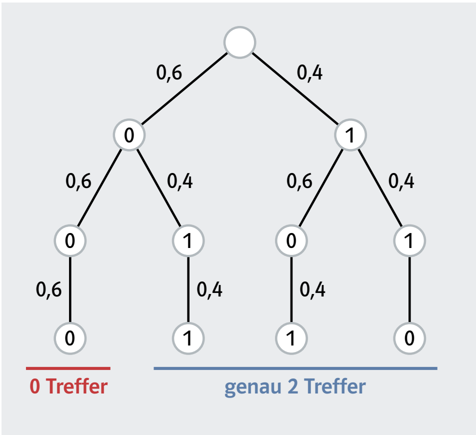
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „keinmal Kopf " ist nach der Pfadregel:

$0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}6^3 = 0{,}216 = 21{,}6\,\%$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau zweimal auf dem Kopf landen" ist nach der Pfad- und Summenregel:

$3 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 \approx 0{,}288 = 28{,}8\,\%$.

Die Gewinnchancen sind mit jeweils weniger als 30 % für Peter und Robert relativ klein, aber die größeren Gewinnchancen hat Peter mit 28,8 %.



Nur die nötigen Pfade des Baumdiagramms zeichnen!

3. Das Modell bewerten:

Eine Unsicherheit des Modells ist die aufgrund eines häufig durchgeführten Versuchs geschätzte Wahrscheinlichkeit von 0,4 für das Ereignis „auf dem Kopf landen". Ändert man diese Wahrscheinlichkeit auf z. B. $p = 0{,}39$, ändern sich die gesuchten Gewinnchancen von Robert von 21,6 % auf ungefähr 22,7 % und von die von Peter von 28,8 % auf ungefähr 27,8 %. Der Unterschied zwischen den Gewinnchancen ist also nicht mehr ganz so eindeutig.

Vorraussetzungen und deren Auswirkung auf das Ergebnis klar machen!

Aufgaben

1 Bestimme mithilfe eines Atlasses näherungsweise die Fläche des US-Staates Kalifornien (Fig. 1). Recherchiere im Internet oder in geeigneter Fachliteratur nach der tatsächlichen Größe von Kalifornien und vergleiche sie mit deinem Ergebnis.

Fig. 1

2 Herr Becker fährt mit dem Auto um 8 Uhr morgens mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h etwas nördlich von Wiesbaden in Richtung Köln los. Frau Becker startet 40 Minuten später, aber mit 90 km/h. Köln liegt 150 km entfernt. Kann Frau Becker ihren Mann noch vor Köln einholen, falls beide ihre Geschwindigkeiten beibehalten?

3 Ricarda und Katharina werfen 20 aneinander befestigte Heftklammern. Ricarda schlägt vor: „Wir werfen den Block aus 20 Heftklammern viermal. Landen die Heftklammern genau zweimal mit der Fläche nach unten, gewinnst du, landen sie genau viermal mit der Fläche nach unten, gewinne ich. In jedem anderen Fall fangen wir noch einmal von vorne an. Der Verlierer muss dem Sieger ein Eis spendieren." Sollte sich Katharina auf das Spiel einlassen?

4 Ulla hat Wasser zum Kochen gebracht und den Temperaturanstieg protokolliert. Die gemessenen Daten hat sie in ein Koordinatensystem eingetragen.
a) Lies Daten aus dem Punktediagramm in Fig. 1 ab und gib eine Funktionsgleichung an, die die Temperatur in Abhängigkeit der Zeit näherungsweise beschreibt.
b) Wie heiß ist das Wasser nach 20 Minuten?
c) Nach wie vielen Minuten kocht das Wasser? Löse rechnerisch.
d) Wieso liegen die Punkte des Diagramms in Fig. 1 nicht genau auf einer Geraden?

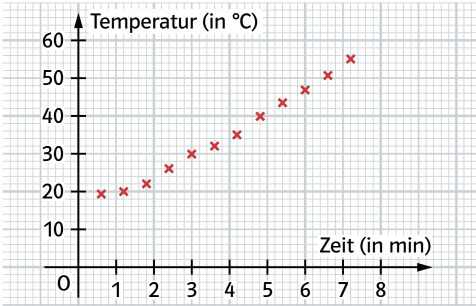


Fig. 1

5 Marias Moped hat einen Benzintank, der 7 l fasst. Sie will einen Freund besuchen, der 2 km entfernt wohnt. Das Moped verbraucht ungefähr 0,1 l Benzin pro km. Ehe Maria abfährt, tankt sie voll. Sie tankt 4,5 l Benzin, das 1,27 € pro Liter kostet. Erkläre, was mit den folgenden Termen berechnet werden kann.
a) $2 \cdot 0{,}1$ b) $7 : 0{,}1$
c) Stelle selber mindestens zwei Terme zum Sachverhalt auf und lasse deinen Nachbarn seine Bedeutung finden.

6 Formuliere eine passende Aufgabenstellung zu dem Baumdiagramm in Fig. 2.

7 In der ersten Jahreshälfte des Jahres 2007 war der größte Mann der Welt 2,36 m groß. Er kommt aus China und heißt Bao Xishun. Welche Konfektionsgröße und Schuhgröße benötigt er und wie hängen diese mit der Körpergröße zusammen? Eine Recherche über den Zusammenhang von Körpermaßen und Konfektionsgrößen ist hilfreich.


Bao Xishun

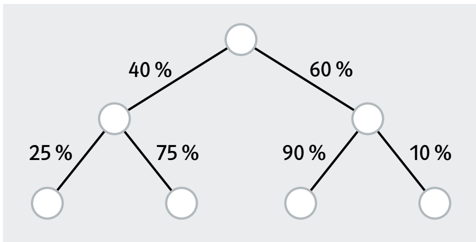


Fig. 2

8 Zu jeder Bergetappe eines Radrennens gehört ein Höhenprofil. Den Profis geht es wie euch: Bergauf brauchen sie für eine Strecke deutlich länger als für dieselbe Strecke abwärts.
a) Beschreibe das Höhenprofil aus Fig. 3.
b) Skizziere einen Graphen für die Zuordnung *Zeit → Geschwindigkeit*.
c) Skizziere einen Graphen für die Zuordnung *Zeit → Weg*.

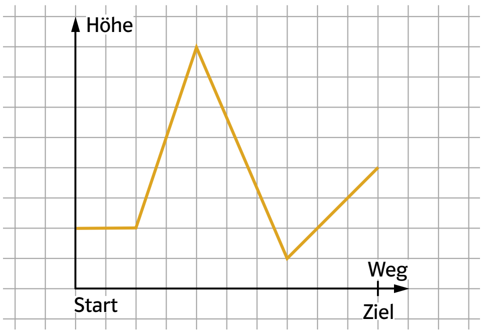


Fig. 3

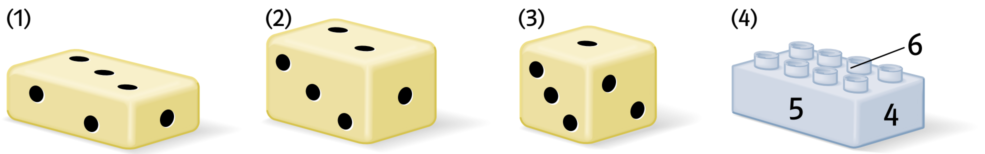
9 Ali fährt mit dem Fahrrad zu seiner Oma und fährt zunächst recht gemütlich. Auf halber Strecke merkt er, dass er sich beeilen muss. Er gibt dann Gas und fährt mit doppelter Geschwindigkeit. Zeichne zu diesem Sachverhalt einen zugehörigen Graphen.

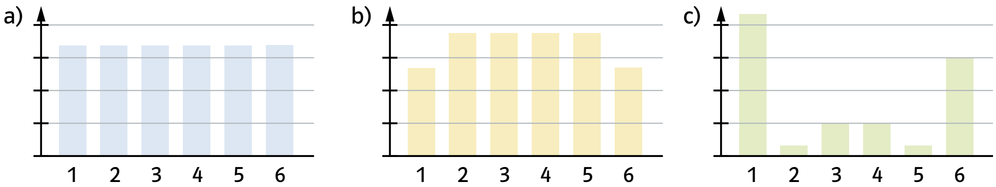
10 Ein Zeppelin ist ein mit Helium gefülltes, starres Luftschiff. Helium besitzt eine geringere Dichte als Luft und kann deshalb das Luftschiff tragen.

Der Transportzeppelin vom Typ „Cargolifter" hat ein Leergewicht von 5400 kg und umschließt ein Volumen von 7000 m^3. Die 7000 m^3 Luft wiegen etwa 8429 kg, sodass der mit Luft gefüllte Zeppelin etwa 13 829 kg wiegt. Ein Kubikmeter Helium wiegt etwa 1,03 kg weniger als ein Kubikmeter Luft. Beim Einfüllen des Heliums wird der Zeppelin also immer leichter. Ist seine Dichte geringer als die Dichte der Luft, kann er schließlich aufsteigen.
a) Um wie viel Kilogramm wird der Zeppelin leichter, wenn man 300 m^3 Helium einfüllt?
b) Das Gewicht des Zeppelins hängt von dem Volumen des eingefüllten Heliums ab. Mit welcher Gleichung kann man die Funktion *eingefülltes Volumen von Helium → Gewicht des Zeppelins* beschreiben und was bedeuten die Variablen in dieser Funktionsgleichung?
c) Zeichne den zur Funktionsgleichung in b) gehörenden Graphen.
d) Der Zeppelin soll eine Ladung mit einem Gewicht von ca. 1600 kg transportieren. Wie verändert sich der zugehörige Graph? Begründe.
e) Wie viele Kubikmeter Helium müssen in den beladenen Zeppelin aus d) mindestens eingefüllt werden, damit er eine geringere Dichte besitzt als Luft und damit aufsteigt.

Die Dichte berechnet sich aus Masse/Volumen. Dichte von Luft: $\rho = 1{,}2041\,kg/m^3$.

11 Welcher Wurfgegenstand passt zu welchem Diagramm, wenn in den Diagrammen die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse, eine bestimmte Augenzahl zu würfeln, in Prozent angegeben werden? Begründe. Wie müssten die Achsen der Diagramme beschriftet werden? Zeichne für den vierten Wurfgegenstand ein passendes Diagramm.





12 Metall dehnt sich aus, wenn man es erhitzt, und es zieht sich zusammen, wenn man es abkühlt. Bei einem 10 m langen Stahlträger verändert sich die Länge um 1,15 mm, wenn sich die Temperatur um 10 °C ändert. Der Berliner Funkturm hat bei 20 °C eine Länge von 150 m. Das Gerüst ist aus Stahl gefertigt. Wie groß ist der Längenunterschied des Turms zwischen Winter (−15 °C) und Sommer (+30 °C)?

Aus den Lernstandserhebungen 2005

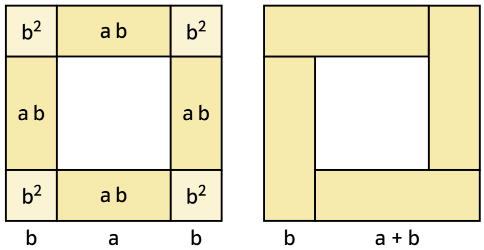
13 Satelliten, deren Geschwindigkeit so groß ist, dass sie für einen Erdumlauf genau 24 Stunden benötigen, scheinen durch den Gleichlauf mit der Erde fest am Himmel zu stehen. Wie hoch steht ein solcher geostationärer Satellit, wenn er sich mit einer Geschwindigkeit von 3,07 km/s bewegt? Welche Modellannahmen werden gemacht?

Der Radius des Äquators beträgt 6398 km.

8 Abschlusstest

Jetzt hast du fleißig geübt und fühlst dich hoffentlich gut vorbereitet auf diesen Abschlusstest. Auf den folgenden vier Seiten kommen Aufgaben zu allen Themenbereichen vor. Du kannst den Test in einem Durchgang bearbeiten oder auch in zwei oder drei kleineren Phasen. Nach jeder Phase oder spätestens, wenn du alle Aufgaben bearbeitet hast, solltest du deine Lösungen mithilfe der Seiten 247 bis 250 korrigieren. Nach der Korrektur kannst du selbst einschätzen, ob du genug gelernt hast und dich im Vergleich zum Beginn dieses Kapitels verbessert hast oder ob du noch mehr üben solltest.

1 a) Gib zu der farbigen Fläche der beiden Figuren je zwei passende Terme an und zeige, dass alle vier Terme äquivalent sind.
b) Skizziere die rechte Fig. ins Heft und schraffiere die Fläche, die sich beschreiben lässt durch $(a + b) \cdot (2b + a) - (ab + b^2)$.



2 Beim Skispringen werden sowohl die Haltung als auch die Weite des Sprungs bewertet. Fünf Sprungrichter bewerten die Haltung des Springers. Jeder Sprungrichter kann maximal 20 Punkte vergeben. In den offiziellen Regeln steht: „Die höchste und niedrigste Note aus der Bewertung der fünf Sprungrichter werden gestrichen. Die verbleibenden drei Noten werden addiert.“ Die Summe dieser drei Noten ist die Haltungsnote.

Aus der Lernstands-erhebung 2004

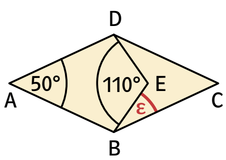
a) Die Ergebnisse vom 1. Januar 2004 stehen in der Tabelle. Berechne die fehlenden Haltungsnoten von Höllwarth und Späth.
b) Beate weiß, dass ihr Lieblingsspringer Hannawald 55 Punkte als Haltungsnote erhalten hat.
Wie könnten die fünf Sprungrichter gepunktet haben?

Sportler	Sprungrichterpunkte					Haltungsnote
Pettersen	18,0	17,5	18,5	17,0	18,5	54 Punkte
Höllwarth	19,5	19,0	19,0	19,5	19,0	
Späth	18,5	18,5	18,5	18,5	18,5	

Beispiel: ~~17,0~~ ; ~~18,5~~
18,0 + 17,5 + 18,5 = 54

c) Nimm nun an, dass die Haltungsnoten nicht wie in der Tabelle, sondern als arithmetisches Mittel der fünf Sprungrichterpunkte ermittelt werden. Berechne unter dieser Voraussetzung die Haltungsnoten von Pettersen und Höllwarth.
Außer der Haltung wird auch die Sprungweite bewertet. Für die Sprungweite erhält ein Sportler 60 Punkte, wenn er genau 115 m weit springt. Springt er weiter, erhält er einen Zuschlag von 1,8 Punkten je Meter. Springt er kürzer, erhält er einen Abzug von 1,8 Punkten je Meter.
d) Pettersen sprang 123 m weit, Hannawald sprang 112 m weit. Berechne, wie viele Punkte sie für ihre Weiten bekamen.
e) Gib einen Term für die Berechnung der Punkte an, die es für die Sprungweite gibt.

Ein Drache ist ein Viereck, bei dem eine Diagonale Symmetrieachse des Vierecks ist.



Aus der Lernstands-erhebung 2007

3 Das Viereck ABCD ist eine Raute und das Viereck ABED ein Drachen mit der Strecke $\overline{AE}$ als Symmetrieachse. Bestimme den Winkel ε. Begründe ausführlich.

4 Am 18.03.1999 bauten die Einwohner von Hampsville (USA) aus 304 756 Legosteinen einen 21,37 m hohen Turm. Ein Legostein wiegt etwa 2,75 g. Wie viele Schülerinnen und Schüler deiner Jahrgangsstufe bräuchtest du etwa, um den Turm auf einmal anzuheben? Begründe rechnerisch. Welche Annahmen hast du getroffen?

Lösungen auf Seite 247–250.

5 Rebecca schneidet aus Pappe verschieden große Rechtecke aus. Sie misst die Seitenlängen, berechnet die Flächeninhalte und wiegt dann die Rechtecke. Die gefundenen Werte trägt sie in ein Koordinatensystem ein (Fig. 1).
a) Ist die Zuordnung *Flächeninhalt → Gewicht proportional*? Begründe.
b) Wie kommt es, dass die Punkte nicht genau auf einer Geraden liegen?
c) Wie schwer wird ein Papprechteck mit dem Flächeninhalt 1 m^2 ungefähr sein?
d) Welche Fläche wird ein Papprechteck ungefähr haben, das 1200 g wiegt?

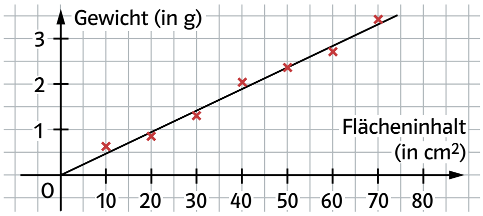
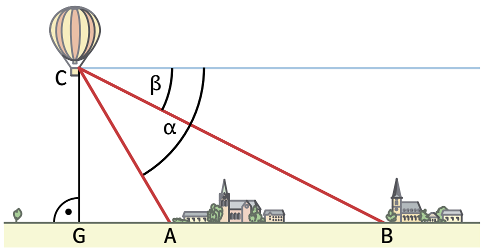


Fig. 1

6 Von einem Heißluftballon aus werden die Orte A und B unter den Winkeln $\alpha \approx 66°$ und $\beta \approx 24°$ angepeilt. Die Orte A und B liegen 2700 m voneinander entfernt. Wie hoch schwebt der Ballon über dem Punkt G? Zeichne das Dreieck ABC in einem selbst gewählten Maßstab in dein Heft und miss die gesuchte Höhe.



7 Alexandra „würfelt“ mit einer Sechskantmutter (Fig. 2) Zahlen von 1 bis 8.
a) Welche Schätzung (vergleiche Tabelle) der Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 bis 8 passt zu der Sechskantmutter? Begründe.
b) Berechne mit der von dir gewählten Schätzung aus a) die Wahrscheinlichkeit dafür, in drei Würfen nur ungerade Zahlen zu „würfeln“.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6	7	8
Schätzung A für Wahrsch. in %	35	5	5	5	5	5	5	35
Schätzung B für Wahrsch. in %	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5

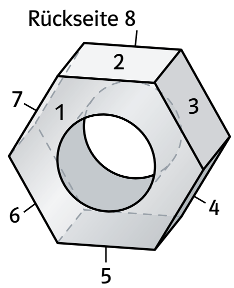


Fig. 2

8 Herr Barth rasiert sich seit seinem 17. Geburtstag täglich. Wie alt wird Herr Barth sein, wenn er eine Fläche rasiert hat, die so groß ist wie sein 15 m langer und 8 m breiter Rasen?

9 Der Body Mass Index (BMI) stellt eine Beziehung zwischen der Körpergröße eines Menschen und seinem Gewicht her. Lies die Antworten zu den folgenden Fragen aus Fig. 3 ab.
a) Wie viel kg wiegt ein Mensch, der 1,80 m groß ist und einen BMI von 25 besitzt?
b) Wie viel kg sollte man mindestens und höchstens wiegen, wenn man 1,65 m groß ist?
c) Paul wiegt 70 kg und behauptet, dass sein BMI optimal ist. Wie groß könnte Paul sein?

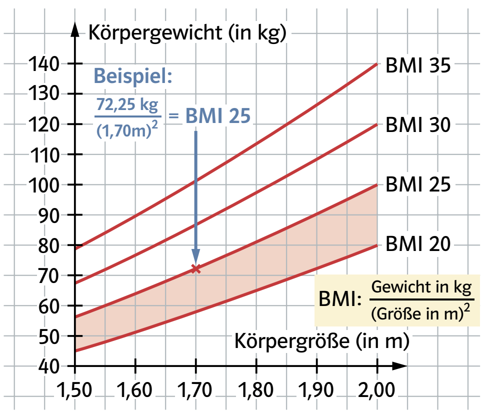


Fig. 3

Der BMI errechnet sich aus Körpergewicht in Kilogramm geteilt durch die Körperlänge in Metern zum Quadrat. So lässt sich ablesen, in welche Risikogruppe jemand fällt. Die Weltgesundheitsorganisation hält einen BMI zwischen 20 und 25 für optimal. Andererseits gibt es Hinweise, dass auch der Bereich zwischen 25 und 30 noch gesund ist.

Lösungen auf Seite 247–250.

Fettgehalt:	
Leberwurst	40 %
Schokolade	31 %
Pommes frites	15 %
Kirschtorte	14 %
Kotelett	11 %
Milch	3,5 %
Vollkornbrot	1 %

Fig. 1

10 Die Tabelle (Fig. 1) zeigt den Fettgehalt einiger Lebensmittel an. Ein Mann sollte nicht mehr als 85 g, eine Frau nicht mehr als 70 g Fett täglich essen.
a) Wie viel Gramm dieser Nahrungsmittel dürfte ein Mann bzw. eine Frau täglich höchstens essen? Trage deine Ergebnisse in eine Tabelle ein.
b) Herr Paulus hatte folgendes Menü: 250 g Pommes frites, 180 g Kotelett, 400 g Milch. Wie viel Gramm Schokolade sind demnach noch erlaubt?

11 Jedes Jahr sterben 40 700 Personen durch das Rauchen in Deutschland. Das bedeutet, dass in Deutschland etwa alle 13 Minuten eine Person durch Tabak stirbt. Weltweit fangen 90 000 Jugendliche täglich mit dem Rauchen an. Das Diagramm in Fig. 2 veranschaulicht die Entwicklung der jugendlichen Raucher in Deutschland. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?
Das Diagramm zeigt, dass
a) der Anteil der rauchenden Jungen zwischen 41 % und 54 % variiert,
b) im Jahr 1979 $\frac{2}{5}$ aller Mädchen rauchten,
c) während einer Periode in den 90er-Jahren keine Mädchen rauchten,
d) 1973 im Vergleich zu 1993 ein doppelt so hoher Anteil Mädchen rauchte,
e) der Anteil der Raucher bei Mädchen bzw. Jungen gleichzeitig stieg,
f) jedes Jahr ein größerer Anteil Jungen als Mädchen rauchte,
g) 1982 der Anteil der Jungen, die rauchten, am geringsten war,
h) es von 1983 – 1993 viele Mädchen gab, die mit dem Rauchen aufhörten,
i) es 1992 im Vergleich zu 1986 anteilig mehr Jungen gab, die rauchten.
Anteil der Jugendlichen in Deutschland, die jeden oder fast jeden Tag rauchen:

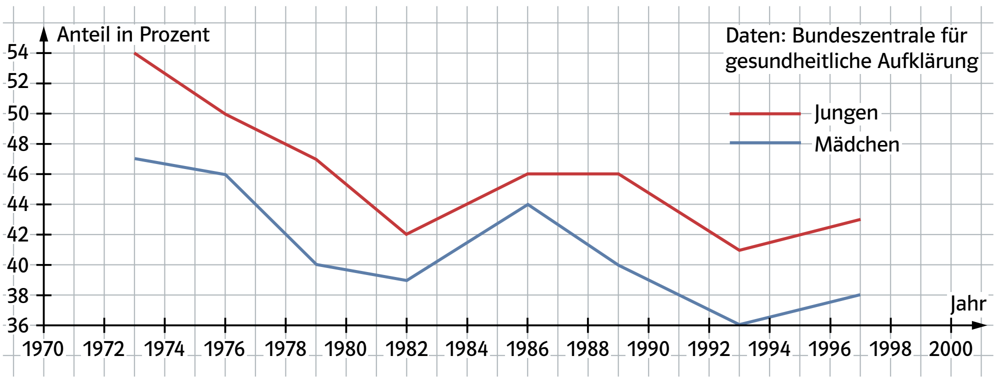


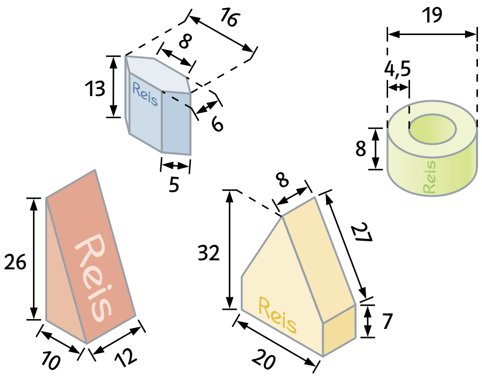
Fig. 2

12 Paul bekommt von seiner Großmutter 5000 € geschenkt. Er legt das Geld zu einem Zinssatz von 2,5 % auf einem Sparbuch an.
a) Wie hoch ist das Guthaben nach einem Jahr?
b) Über welchen Betrag könnte er nach einem halben Jahr verfügen?
c) Wie hoch ist das Guthaben nach drei Jahren, wenn die Zinsen auf dem Konto mitverzinst werden?

13 100 Roggenkörner wiegen ungefähr 3 g. Wie viele Roggenbrote kann man wohl aus dem Korn eines 1 ha großen Roggenfeldes backen? Erkläre, wie du vorgegangen bist, und überlege, wie du überprüfen kannst, ob deine Schätzung realistisch ist.

Lösungen auf Seite 247–250.

14 Die Schüler der 8c hatten die Aufgabe, Verpackungen für ein Kilogramm Reis zu basteln. Jede Verpackung muss so beschaffen sein, dass ein Kilogramm Reis hineinpasst, sie aber nicht so groß ist, dass sie befüllt mehr als 15 % des Verpackungsvolumens Luft enthält.
a) Entsprechen alle Reisverpackungen den Anforderungen?
b) Für welche Verpackung wurde am wenigsten Pappe benötigt? (Klebekanten sollen nicht eingerechnet werden.)



15 Familie Hartung möchte sich ein neues Auto kaufen. Nachdem sie sich für ein Modell entschieden haben, müssen sie sich nur noch überlegen, ob sie die Diesel- oder Benzinversion dieses Modells kaufen möchten. In einer Autozeitschrift haben sie gelesen, dass die monatlichen Festkosten für die Benzinversion ihres Wunschmodells inklusive Steuer- und Versicherungen 190,95 € betragen. Die Kraftstoffkosten je Kilometer betragen bei dieser Benzinversion 0,12 €. Ein Bekannter, der die Dieselversion des gewünschten Modells besitzt, erzählt ihnen, dass er im letzten Monat, bei 960 zurückgelegten Kilometern, 307,70 € Kosten inklusive Festkosten, Steuern und Versicherung und im Monat davor, bei 1240 gefahrenen Kilometern, 330,10 € für alles bezahlt hat.

Benzinversion
- monatliche Festkosten: **174,40 €**
- Steuern und Versicherung monatlich: **16,55 €**
- Kraftstoffkosten je Kilometer: **0,12 €**

a) Wie viel kostet bei der Dieselversion der Kraftstoff pro Kilometer?
b) Stelle je eine Gleichung für die Funktion *gefahrene Kilometer → monatliche Gesamtkosten* auf und zeichne die zugehörigen Graphen der Funktionen.
c) Wie viele Kilometer muss die Familie Hartung im Monat mindestens fahren, damit sich die Dieselversion lohnt? Löse zeichnerisch und rechnerisch.

16 In einer Lostrommel befinden sich Treffer und Nieten. Die genauen Zahlen sind nicht bekannt. Beantworte die folgenden Fragen. Gib jedes Mal ein einfaches Beispiel an, um deine Vermutung zu überprüfen.
a) Wie ändert sich die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn man die Anzahl der Nieten verdoppelt?
b) Wie ändert sich die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn man die Anzahl der Treffer verdoppelt?
c) Wie ändert sich die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn man die Anzahl der Treffer und der Nieten halbiert?

17 Wie lang ist die Schnur, aus der die Schnecke in Fig. 1 gerollt wurde, ungefähr, wenn der Durchmesser der Schnecke etwa 7 cm beträgt?

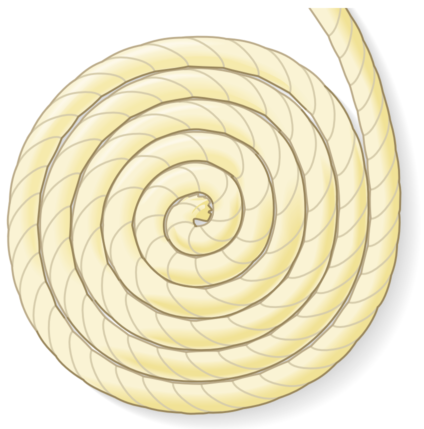


Fig. 1